ΜΑΘΗΜΑΤΑ ΟΠΤΙΚΗΣ

(ΜΕ ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗ ΚΥΜΑΤΙΚΗ)

4 - ΔΙΑΣΚΕΔΑΣΜΟΣ ΤΟΥ ΦΩΤΟΣ

Ε.Δ. ΒΑΝΙΔΗΣ

ΘΕΣ/ΝΙΚΗ ΝΟΕΜΒΡΙΟΣ 2017

4 *Διασκεδασμός του φωτός*

Ο ***διασκεδασμός (ή διασπορά) (dispersion)*** αναφέρεται στην εξάρτηση του δείκτη διάθλασης (δ.δ.) ενός οπτικού μέσου από τη συχνότητα $\nu(\omega = 2\pi\nu)$ ή αντίστοιχα από το μήκος κύματος (μ.κ.) $\lambda(c = \lambda\nu)$, των Η/Μ κυμάτων που διαδίδονται μέσα σ' αυτό. Σαν οπτικά μέσα για τις περιπτώσεις που εξετάζουμε, θα θεωρήσουμε τα ***διηλεκτρικά (dielectrics).*** Τα διηλεκτρικά ή μονωτές συγκρινόμενα με τους αγωγούς, έχουν αγωγιμότητα μικρότερη κατά 15 έως 20 τάξεις μεγέθους. Αναφερόμαστε πιο συγκεκριμένα στα διαφανή διηλεκτρικά (υλικά με πολύ μικρή απορρόφηση), δεδομένου ότι ο ρόλος τους στην Οπτική τεχνολογία είναι πολύ σημαντικός εξαιτίας του πολύ μεγάλου πλήθους των εξαρτημάτων που κατασκευάζονται από αυτά. Τα πιο απλά παραδείγματα είναι οι φακοί, τα πρίσματα, οι οπτικές ίνες (fibers) κ.λ.π. που αποτελούνται κυρίως από διάφορα είδη γυαλιών, χωρίς να ξεχνάμε ότι ο αέρας και το νερό ανήκουν σ' αυτήν την κατηγορία των υλικών. Σαν δ.δ. ενός ομογενούς και ισοτρόπου διηλεκτρικού, ορίζουμε το λόγο της ταχύτητας διάδοσης μιας Η/Μ ακτινοβολίας (συχνότητας ω) στο κενό, προς την ταχύτητα διάδοσης της στο μέσο δηλ. $n = c/\upsilon$ και ο οποίος σχετίζεται άμεσα με σταθερές των διαφορικών εξισώσεων του Maxwell.

Πράγματι εάν επιλέξουμε να περιγράψουμε μια Η/Μ διαταραχή στο κενό με τη βοήθεια της έντασης του ηλεκτρικού πεδίου **E**, τότε η κάθε συνιστώσα του σε καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων x, y, z θα υπακούει στη δ.ε. του Maxwell (Κεφ.2: Η/Μ κύματα § 4.1.14):

$$\nabla^2 E - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = 0 \quad \text{ή} \quad \nabla^2 E - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = 0 \tag{4.1}$$

όπου ε_0, μ_0 η ηλεκτρική και η μαγνητική διαπερατότητα στο κενό και c η ταχύτητα του φωτός στο κενό με $\varepsilon_0 = 8.842 \times 10^{-12}\ \mathrm{F/m}$ και $\mu_o = 4\pi \times 10^{-7}\ \mathrm{H/m}$. Για την περίπτωση που η διαταραχή διαδίδεται σε ένα άλλο ομογενές και ισότροπο μέσο, τότε οι δύο παραπάνω εξισώσεις γράφονται:

$$\nabla^2 E - \varepsilon\mu \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = 0 \quad \text{ή} \quad \nabla^2 E - \frac{1}{\upsilon^2}\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = 0 \tag{4.2}$$

όπου τώρα $\upsilon = 1/\sqrt{\varepsilon\mu}$, $(\upsilon < c)$ είναι η ταχύτητα διάδοσης, και ε, μ η ηλεκτρική και μαγνητική διαπερατότητα του μέσου. Κατά τα γνωστά ο λόγος:

$$n = c/\upsilon = \sqrt{\frac{\varepsilon\mu}{\varepsilon_0\mu_0}} = \sqrt{k_e k_m} \tag{4.3}$$

είναι ο ***απόλυτος δ.δ. του μέσου (absolute index of refraction)*** και k_e, k_m οι ***σχετικές ηλεκτρική και μαγνητική διαπερατότητα του μέσου.*** Επειδή τα διαφανή υλικά για τα οποία ενδιαφερόμαστε, στην ορατή περιοχή του Η/Μ φάσματος κατά προσέγγιση θεωρούμε ότι είναι μη μαγνητικά, μπορούμε να πούμε ότι $k_m \simeq 1.0$ άρα:

$$n = \sqrt{k_e} \tag{4.4}$$

όπου k_e η ονομάζεται και ***διηλεκτρική σταθερή (static dielectric constant)*** της οποίας υποθέτουμε βέβαια ότι η τιμή είναι ***στατική***.

<u>Σημείωση</u>

Ο υπολογισμός της διηλεκτρικής σταθερής k_e γίνεται συνήθως μέσω των μετρήσεων της χωρητικότητας πυκνωτή (γέφυρα), του οποίου ο ενδιάμεσος χώρος μεταξύ των οπλισμών του πληρούται με το συγκεκριμένο διηλεκτρικό. Αν είναι γνωστή η τάση μεταξύ των οπλισμών του καθώς και τα γεωμετρικά του χαρακτηριστικά μπορούμε να υπολογίσουμε την k_e. Για την περίπτωση που η τάση είναι συνεχής (στατική) η εναλλασσόμενη με συχνότητα το πολύ μέχρις 60Hz, τότε μιλούμε για στατική διηλεκτρική σταθερή.

Τιμές των $\sqrt{k_e}$ με την προηγούμενη μέθοδο προσδιορισμού φαίνεται στον (Πίν. 4.1) για αέρια, υγρά και στερεά διαφανή διηλεκτρικά. Σε διπλανή στήλη του ίδιου πίνακα φαίνονται οι τιμές του δ.δ. n, οι οποίες με βάση τη (σχ. 4.4) θα έπρεπε να ταυτίζονται με τις αντίστοιχες των $\sqrt{k_e}$. Αυτό όμως δεν συμβαίνει παρά μόνο για ορισμένα αέρια. Το γεγονός οφείλεται στον τρόπο προσδιορισμού του δ.δ n. Ο υπολογισμός γίνεται συνήθως με τη βοήθεια φασματοσκοπίου πρίσματος (§ 4.4.2) και με βάση τον καθορισμό της γωνίας ελάχιστης εκτροπής (βλ. ΠΑΡ/ΜΑ 3). Το φως που χρησιμοποιείται είναι αυτό της φασματικής λυχνίας $\text{Na}\left(\lambda_\text{D} = 589.29\text{nm}\right)$ δηλ. συχνότητας $\nu \simeq 0.5\times10^{15}\,\text{Hz}$ ενώ για τον υπολογισμό της k_e $\left(n = \sqrt{k_e}\right)$, εφαρμόζεται στατικό πεδίο ή το πολύ συχνότητας 60Hz.

Η ασυμφωνία αυτή μας οδηγεί στο να διαπιστώσουμε ότι ο λόγος $k_e = \varepsilon/\varepsilon_0$ και συνακόλουθα ο δ.δ. n είναι μεγέθη που εξαρτώνται από τη συχνότητα των δια-

διδόμενων διαταραχών στο οπτικό μέσο και το φαινόμενο όπως ήδη προαναφέραμε ονομάζεται διασκεδασμός. Η ερμηνεία του όπως θα δούμε αμέσως μετά, ανάγεται σε μικροσκοπικές υποθέσεις (ατομική δομή της ύλης) και δεν προκύπτει από τις εξισώσεις του Maxwell επειδή αυτές εφαρμόζονται μόνο για συνεχή μέσα διάδοσης. Υπόβαθρο της ερμηνείας αποτελεί η θεωρία της πόλωσης των διηλεκτρικών, στοιχεία της οποίας αναφέρουμε στην επόμενη παράγραφο.

Υλικό	$\sqrt{k_e}$	n
	Αέρια $\left(0^0\text{C-1Atm}\right)$	
Αέρας	1.000294	1.000293
Ήλιο	1.000034	1.000036
Υδρογόνο	1.000131	1.000132
Διοξείδιο του άνθρακα	1.00049	1.00045
Αιθυλένιο	1.000689	1.00065
Άζωτο	1.0003	1.0003
	Υγρά (στους 20^0C)	
Βενζένιο	1.51	1.501
Νερό	8.96	1.333
Εθανόλη	5.08	1.361
Τετραχλωράνθρακας	4.63	1.461
	Στερεά (σε θερμ/α δωματίου)	
Διαμάντι	4.00	2.419
Κεχριμπάρι	1.6	1.55
Τετηγμένος χαλαζίας	1.94	1.458
Χλωριούχο νάτριο	2.37	1.50
Διοξείδιο του Τιτανίου	10.677	2.7

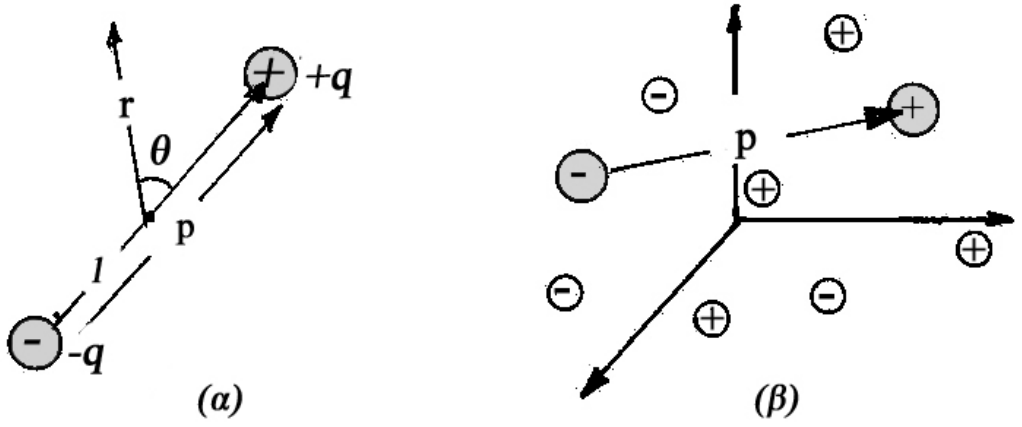
(Πίν. 4.1)

4.1 *Ηλεκτρικά δίπολα, διηλεκτρικά και πόλωση των διηλεκτρικών Φυσική συχνότητα και ο κλασσικός δυναμικός ταλαντωτής*

4.1.1 *Ηλεκτρικά δίπολα, διηλεκτρικά και πόλωση των διηλεκτρικών*

Ηλεκτρικό δίπολο (electric dipole) ονομάζουμε γενικά μια κατανομή δύο ίσων κατά μέτρο και αντιθέτου προσήμου φορτίων τα οποία βρίσκονται σε μια ορισμένη απόσταση μεταξύ τους (Σχ. 4.1.1.1α). Ο σχηματισμός χαρακτηρίζεται από

ένα καθορισμένο στατικό ηλεκτρικό πεδίο δυναμικού $V(r.\theta)$ και έντασης $\mathbf{E}(r.\theta)$. Τα δύο αυτά πεδιακά μεγέθη εκφράζονται με τη βοήθεια ενός θεμελιώδους δια-



(Σχ. 4.1.1.1)

νυσματικού μεγέθους που ονομάζεται ***ηλεκτρική διπολική ροπή*** **p** ***(electric dipole moment)*** με φορά από το αρνητικό προς το θετικό φορτίο και δίνεται από τη σχέση:

$$\mathbf{p} = q\mathbf{l} \tag{4.1.1.1}$$

όπου το μέτρο του **l** είναι η απόσταση μεταξύ των φορτίων. Ένα ηλεκτρικό δίπολο, όταν βρεθεί μέσα σε εξωτερικό ηλεκτροστατικό πεδίο **E** αφ' ενός μεν αποκτά μια πρόσθετη δυναμική ενέργεια $W_p = -\mathbf{p}\cdot\mathbf{E}$, αφ' ετέρου πάνω του ασκείται μία ροπή στρέψης $\mathbf{T} = \mathbf{p}\times\mathbf{E}$ η οποία τείνει να το προσανατολίσει σε θέση ελάχιστης δυναμικής ενέργειας. Αν επίσης το εξωτερικά εφαρμοζόμενο πεδίο **E** είναι ανομοιογενές, τότε θ' ασκηθεί πάνω στο δίπολο και μια δύναμη ($\mathbf{F} = -\nabla W_p$) που θα τείνει να του προσδώσει μεταφορική κίνηση εφ' όσον αυτό είναι ελεύθερο και μπορεί να μετακινηθεί.

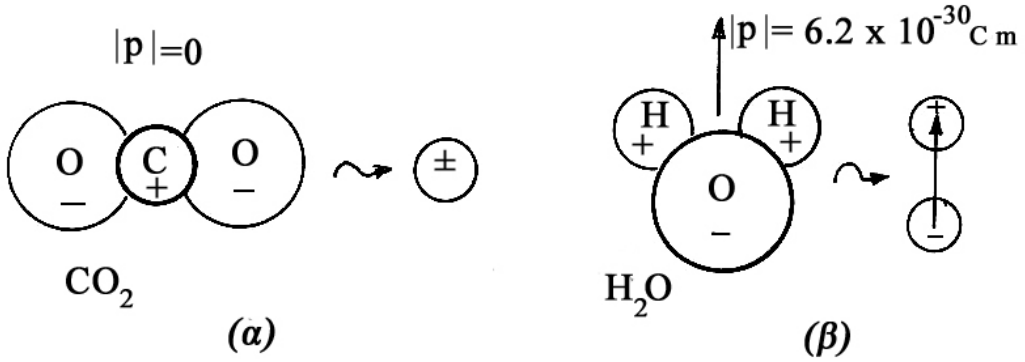
Ένα σημαντικό γεγονός το οποίο αποδεικνύεται και το οποίο παίζει πρωταρχικό ρόλο στη διάδοση των Η/Μ διαταραχών μέσα στην ύλη, είναι ότι τα μόρια αυτά καθ' αυτά μπορούν να προσομοιαστούν με ηλεκτρικά δίπολα. Πράγματι τα κινούμενα γύρω από τους πυρήνες των ατόμων του μορίου ηλεκτρόνια, είναι δυνατόν κατά τα γνωστά να θεωρηθούν ότι σχηματίζουν 'ηλεκτρονικά νέφη', με συγκεκριμένα κατά μέσο όρο χρονικά κέντρα βάρους του αρνητικού τους φορτίου. Επίσης τα θετικά φορτία των πυρήνων των ατόμων, κατέχουν σχετικά σταθερές θέσεις στο χώρο. Τελικά αν τα θετικά και τα αρνητικά φορτία αθροιστούν ξεχωριστά, μπορούν να εντοπισθούν (κατά μέση χρονική τιμή) (Σχ. 4.1.1.1β) σε δύο 'διακεκριμένες θέ-

σεις' που απέχουν μεταξύ τους σταθερή απόσταση. Το γεγονός αυτό φαινομενολογικά τουλάχιστον αρχικά μας οδηγεί στην ανάδειξη της συμπεριφοράς ενός μορίου σαν ηλεκτρικό δίπολο. Η πλήρης απόδειξη βέβαια αυτού του γεγονότος, γίνεται με τη βοήθεια του ορισμού της ηλεκτρικής διπολικής ροπής ενός συνόλου φορτίων q_i, (θετικών και αρνητικών) τα οποία βρίσκονται κατανεμημένα στο χώρο. Τότε η $\mathbf{p}$ ως προς ένα ορισμένο σύστημα συντεταγμένων ορίζεται ως εξής:

$$\mathbf{p} = \sum_{i=1}^{N} q_i \mathbf{r}_i \qquad (4.1.1.2)$$

όπου $\mathbf{r}_i$ το διάνυσμα θέσης του φορτίου q_i. Αποδεικνύεται ότι όταν $\sum_{i=1}^{N} q_i = 0$ (όπως π.χ. συμβαίνει για ένα μόριο) τότε ο ορισμός της $\mathbf{p}$ δεν εξαρτάται από τη θέση του συστήματος συντεταγμένων. Με βάση αυτόν τον ορισμό, αποδεικνύεται ότι για ένα μόριο κάτω από την επίδραση εξωτερικού πεδίου $\mathbf{E}$ ισχύουν οι σχέσεις: $W_p = -\mathbf{p}\cdot\mathbf{E}$, $\mathbf{T} = \mathbf{p}\times\mathbf{E}$ και $\mathbf{F} = -\nabla W_p$. Το τελευταίο γεγονός, επιβεβαιώνει τη συμπεριφορά ενός μορίου σαν ηλεκτρικό δίπολο.

Τα μόρια γενικά διακρίνονται σε ***μη πολικά (non polar)*** και ***πολικά (polar)***. Για τα πρώτα (Σχ. 4.1.1.2.α), τα κέντρα βάρους θετικού και αρνητικού φορτίου συμπίπτουν οπότε δεν εμφανίζεται ενδογενής (στο μόριο) ηλεκτρική διπολική ροπή



(Σχ. 4.1.1.2)

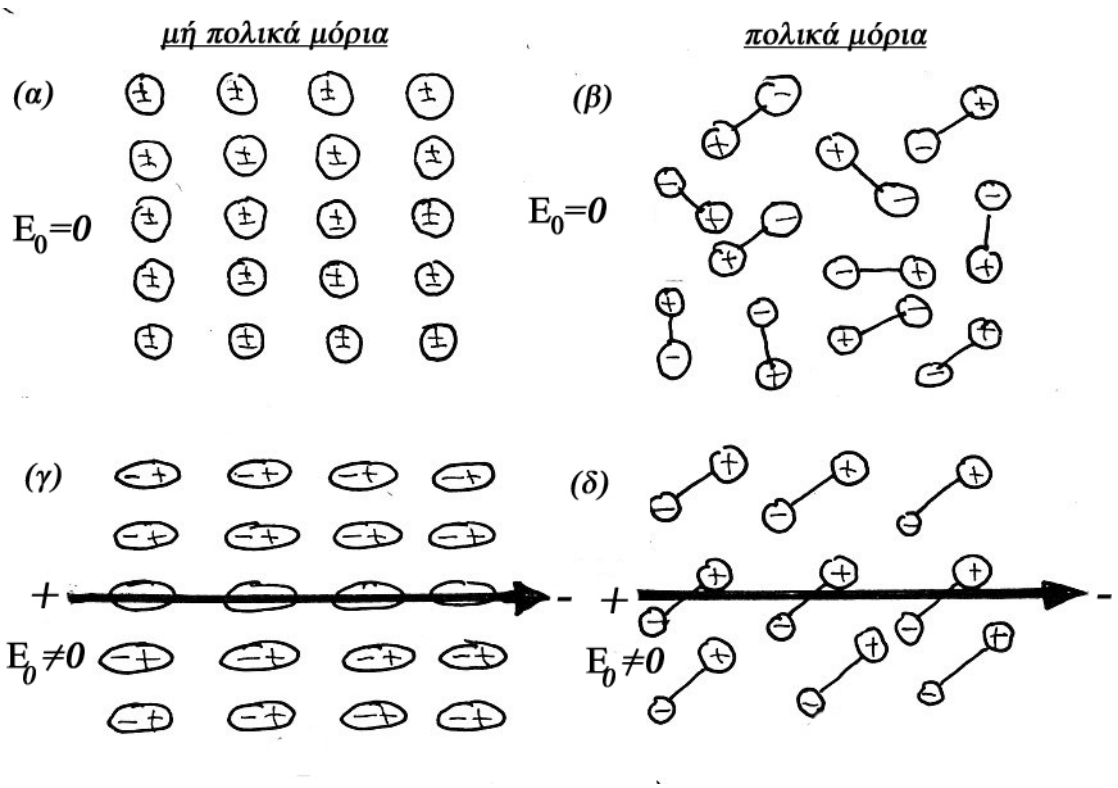
Άρα $\mathbf{p} = 0$. Τυπικό παράδειγμα τέτοιου μορίου, είναι αυτό του διοξειδίου του άνθρακα (CO_2). Για τα πολικά όμως μόρια, τα κέντρα βάρους των φορτίων διαχωρίζονται οπότε εμφανίζουν (ανά μόριο) μία μόνιμη ηλεκτρική διπολική ροπή. Ένα τέτοιο μόριο είναι του νερού (H_2O) για το οποίο $p = 6.2\times10^{-30}$ Cm (Σχ. 4.1.1.2.β).

Πόλωση του διηλεκτρικού

Μας ενδιαφέρει εδώ η συμπεριφορά των μορίων (σαν σύνολο που απαρτίζουν το διηλεκτρικό μέσο), κατ' αρχήν χωρίς την επίδραση και κατόπιν κάτω από την επίδραση εξωτερικού ηλεκτρικού πεδίου $\mathbf{E}_0$. Ένα σημαντικό μέγεθος που περιγράφει την κατάσταση του διηλεκτρικού κάτω από τέτοιες συνθήκες είναι η λεγόμενη ***πόλωση του διηλεκτρικού (polarization of dielectric).*** Ορίζεται για ένα ορισμένο σημείο, σαν το σύνολο των ηλεκτρικών διπολικών ροπών ανά μονάδα όγκου:

$$\mathbf{P} = \sum \mathbf{p}_i / \Delta V \qquad (4.1.1.3)$$

όπου ΔV ένας απειροστός όγκος που περιβάλλει αυτό το σημείο. Όταν ένα διηλεκτρικό δεν υφίσταται την επίδραση εξωτερικού ηλεκτρικού πεδίου $(\mathbf{E}_0 = 0)$ (Σχ. 4.1.1.3.α,β), η τιμή της $\mathbf{P}$ είναι μηδέν. Πράγματι για το διηλεκτρικό που τα μόριά



(Σχ. 4.1.1.3)

του είναι μη πολικά (Σχ. 4.1.1.3α), αυτό είναι αυτονόητο επειδή ανά μόριο η ηλεκτρική διπολική ροπή είναι μηδέν. Το ίδιο όμως συμβαίνει και για το διηλεκτρικό που απαρτίζεται από πολικά μόρια (Σχ. 4.1.1.3β) επειδή λόγω συνήθως της θερμι-

κής κίνησής τους, χρονικά ο προσανατολισμός τους αλλάζει ταχύτητα με συνέπεια $\sum \mathbf{p}_i = 0$ οπότε και η $\mathbf{P}$ είναι ίση με μηδέν. Όταν τώρα το διηλεκτρικό υποστεί την επίδραση εξωτερικού ηλεκτρικού πεδίου (Σχ. 4.1.1.3γ,δ) αυτό το οποίο συμβαίνει συνήθως είναι η εμφάνιση φορτίων στις επιφάνειές του. Το φαινόμενο ονομάζεται ***πόλωση του διηλεκτρικού***. Η εμφάνιση των φορτίων για μεν την περίπτωση των μη πολικών μορίων (Σχ. 4.1.1.3γ), οφείλεται στη σχετική απομάκρυνση (λόγω της επίδρασης του εξωτερικού ηλεκτρικού πεδίου) των αρχικά ταυτισμένων κέντρων βάρους θετικών και αρνητικών ***δέσμιων φορτίων*** των μορίων. Για την περίπτωση των πολικών μορίων (Σχ. 4.1.1.3δ), τα φορτία εμφανίζονται εξαιτίας κατάλληλου προσανατολισμού (με την επίδραση του εξωτερικού πεδίου), των μονίμων 'στερεών' διπόλων του. Για την περίπτωση που στα διηλεκτρικά εμφανίζονται μόνο επιφανειακά φορτία πόλωσης, τότε όπως αποδεικνύεται η πυκνότητά τους $\sigma\left[\mathrm{C/m^2}\right]$ δίνεται από τη σχέση:

$$\sigma = P_n = P\cos a \qquad (4.1.1.4)$$

όπου P_n η κάθετη συνιστώσα της πόλωσης στην επιφάνειά του και a η γωνία μεταξύ του $\mathbf{E}$ και της κάθετης στην επιφάνεια αυτή.

<u>Σημείωση</u>

Δέσμια (bound) ονομάζονται τα φορτία εκείνα τα οποία ανήκουν στα μόρια των διηλεκτρικών και δεν μπορούν να τα εγκαταλείψουν. Τα φορτία που υπάρχουν μέσα στο διηλεκτρικό αλλά δεν ανήκουν στα μόριά του όπως και φορτία εκτός των ορίων του διηλεκτρικού ονομάζονται ***εξωγενή (extraneous)***.

Το ηλεκτρικό πεδίο μέσα στο διηλεκτρικό

Με την επίδραση στο διηλεκτρικό του εξωτερικού πεδίου $\mathbf{E}_0$ (το οποίο οφείλεται σε εξωγενή φορτία), κατά τα γνωστά αυτό πολώνεται και τα φορτία πόλωσης δημιουργούν στο εσωτερικό του ένα νέο πεδίο έντασης $\mathbf{E}'$. Άρα στο εσωτερικό του διηλεκτρικού το πραγματικό πεδίο $\mathbf{E}$ θα είναι η συνισταμένη των δύο τελευταίων, δηλαδή:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 + \mathbf{E}' \qquad (4.1.1.5)$$

Τότε η πόλωση του διηλεκτρικού εκφράζεται από τη (σχ. 2.1.5.4):

$$\mathbf{P} = \chi \varepsilon_0 \mathbf{E} \tag{4.1.1.6}$$

όπου χ κατά τα γνωστά η ηλεκτρική επιδεκτικότητα που είναι ένα μέγεθος αδιάστατο και σχετίζεται με την διηλεκτρική σταθερή k_e του μέσου μέσω της (σχ. 2.1.5.9):

$$k_e = 1 + \chi \tag{4.1.1.7}$$

Είναι γνωστό επίσης ότι η σχέση μεταξύ της κατανομής της πυκνότητας των φορτίων χώρου ρ και της έντασης $\mathbf{E}$ του ηλεκτρικού πεδίου που αυτά δημιουργούν είναι η εξής (σχ. 2.1.4.7):

$$\nabla \mathbf{E} = \rho / \varepsilon_0 \tag{4.1.1.8}$$

Επίσης αποδεικνύεται ότι μεταξύ της πυκνότητας των φορτίων πόλωσης ρ' (στο χώρο) και της πόλωσης $\mathbf{P}$ του διηλεκτρικού υφίσταται η σχέση (σχ. 2.1.5.2):

$$\nabla \mathbf{P} = -\rho' \tag{4.1.1.9}$$

Τα φορτία πυκνότητας ρ', είναι δέσμια φορτία και στο μόνο που διαφέρουν από τα εξωγενή πυκνότητας ρ είναι ότι τα πρώτα δεν μπορούν ν' απομακρυνθούν από τα άτομα. Κατά τα άλλα με τον ίδιο τρόπο μπορούν να δημιουργήσουν στον περιβάλλοντα χώρο τους ηλεκτρικό πεδίο. Θεωρώντας δεδομένη την ύπαρξη εξωγενών και δέσμιων φορτίων στο χώρο που καταλαμβάνει το διηλεκτρικό ή γύρω από αυτό, η ένταση $\mathbf{E}$ θα δίνεται από τη σχέση:

$$\nabla \mathbf{E} = (\rho + \rho') / \varepsilon_0 \tag{4.1.1.10}$$

Τότε από τις (σχ. 4.1.1.10,9) θα έχουμε:

$$\nabla (\varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}) = \rho \tag{4.1.1.11}$$

Κατά τα γνωστά (σχ. 2.1.5.6), το βοηθητικό διάνυσμα $\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$ είναι η ηλεκτρική μετατόπιση. Η τελευταία με τη βοήθεια της (σχ. 4.1.1.6) (για ένα ισότροπο διηλεκτρικό) κατά μέτρο θα μας δώσει: $D = \varepsilon_0 E + P = \varepsilon_0 E + \chi \varepsilon_0 E = (1 + \chi) \varepsilon_0 E$. Και με τη βοήθεια της: (σχ. 4.1.1.7): $\varepsilon_0 E + P = (1 + \chi) \varepsilon_0 E = k_e \varepsilon_0 E \Rightarrow \varepsilon_0 E (k_e - 1) = P$. Οπότε τελικά:

$$k_e = 1 + \frac{P}{\varepsilon_0 E} \qquad (4.1.1.12)$$

Η τελευταία θα χρησιμοποιηθεί, προκειμένου ν' αναδείξουμε την εξάρτηση που υφίσταται μεταξύ του δ.δ. n του διηλεκτρικού και της συχνότητας ω των διαδιδόμενων μέσα σ' αυτό Η/Μ διαταραχών. Η ίδια σχέση μπορεί να γραφεί και με τη μορφή:

$$(\varepsilon - \varepsilon_0) E = P \qquad (4.1.1.13)$$

Οι διάφοροι τρόποι των πολώσεων

Όπως ήδη έχουμε αναφέρει το φαινόμενο του διασκεδασμού, αφορά την απόκριση κατά συχνότητα ω (ή κατά μ.κ. λ) του δ.δ. n (ή της διηλεκτρικής σταθερής k_e). Ένα βασικό θέμα που προκύπτει, αφορά τον αριθμό των μηχανισμών πόλωσης των διηλεκτρικών σε σχέση α) με τα είδη των μορίων που τα αποτελούν (πολικά – μη πολικά μόρια) και β) με την περιοχή συχνοτήτων των διαδιδόμενων σ' αυτά κυμάτων. Τέτοιες περιοχές συχνοτήτων είναι τα σχεδόν στατικά πεδία από $0-60\text{Hz}$ που έχουν σχέση με τις συχνότητες των ηλεκτρικών δικτύων (γραμμές μεταφοράς ηλεκτρικού ρεύματος). Τα ραδιοκύματα από $1\text{KHz}\left(10^3\,\text{Hz}\right)-1\text{GHz}\left(10^9\,\text{Hz}\right)$. Τα μικροκύματα μεταξύ $1\text{GHz}\left(10^9\,\text{Hz}\right)-1\text{THz}\left(10^{12}\,\text{Hz}\right)$. Η περιοχή του υπέρυθρου (IR) ορατού (VIS) και υπεριώδους (UV) φάσματος μεταξύ $10^{12}\,\text{Hz}-10^{17}\,\text{Hz}$ με μέση περιοχή συχνοτήτων για το ορατό $0.5\times10^{15}\,\text{Hz}$. Οι ακτίνες $-X$ μεταξύ $10^{17}\,\text{Hz}-10^{19}\,\text{Hz}$ και οι ακτίνες γ με συχνότητες μεγαλύτερες των $10^{19}\,\text{Hz}$ (βλ. Κεφ. 2: Η/Μ κύματα (Πίν. 2.3.8)).

Όσον αφορά τα είδη των πολώσεων τα οποία μπορεί να υποστεί ένα διηλεκτρικό, τα βασικότερα είναι τρία: α) Η ***ηλεκτρονική πόλωση (electronic polarization)***, είναι αυτή που οφείλεται στη μετατόπιση των ηλεκτρονικών νεφών σε σχέση με τους πυρήνες. β) Η ***ιοντική πόλωση (ionic polarization)*** που οφείλεται στη μετατόπιση των φορτισμένων ιόντων σε σχέση με τα ιόντα αντιθέτου φορτίου (π.χ. στον ιοντικό κρύσταλλο του NaCl). γ) Η ***διπολική πόλωση (dipolar polarization)*** που οφείλεται στην αλλαγή προσανατολισμού των πολικών μορίων (π.χ. στα μόρια του H_2O). Τα μόρια του νερού μέχρι περίπου τις συχνότητες των $10^{14}\,\text{Hz}$ μπορούν και παρακολουθούν τις εναλλαγές του πεδίου (περιστρεφόμενα ή ταλαντούμενα) και η διηλεκτρική τους σταθερή έχει την τιμή $k_e \simeq 80$. Πάνω όμως από αυτή τη τιμή της συχνότητας τα μόρια του νερού εμφανίζουν μεγάλη αδράνεια και δεν μπορούν

να παρακολουθούν τις εναλλαγές του πεδίου. Τότε σαν συνέπεια θα έχουμε ελάττωση της k_e.

Δεν συμβαίνει όμως το ίδιο και με τα ηλεκτρόνια των ατόμων. Η μικρή τους αδράνεια τα κάνει ικανά να μπορούν να παρακολουθούν πεδία ακόμα και στην περιοχή των οπτικών συχνοτήτων ($0.5\times10^{15}\,\mathrm{Hz}$) συνεισφέροντας μ' αυτόν τον τρόπο στην τιμή $k_e(\omega)$. Δηλαδή η τιμή της k_e π.χ. για το νερό, στις οπτικές συχνότητες οφείλεται αποκλειστικά στο μηχανισμό της ηλεκτρονικής πόλωσης και όχι της διπολικής. Το ίδιο ακριβώς συμβαίνει και για τα στερεά διαφανή διηλεκτρικά (π.χ. γυαλιά, κρύσταλλοι, πλαστικά κ.λ.π.) τα οποία κατά τα γνωστά εμφανίζουν μεγάλο ενδιαφέρον για την οπτική τεχνολογία. Τελικός μας σκοπός στα επόμενα, είναι να παράγουμε μια αναλυτική έκφραση του δ.δ. n συναρτήσει του ω (ή του λ). Για το λόγο αυτό, θα στηριχθούμε σε μικροσκοπικές παραδοχές όσον αφορά την ύλη (δηλ. στα άτομα, τα μόρια, τα ιόντα κ.τ.λ.) καθώς και τη δράση επάνω της των μεταβαλλόμενων χρονικά ηλεκτρικών πεδίων.

4.1.2 *Φυσική συχνότητα (ή συχνότητα συντονισμού) και ο κλασσικός δυναμικός ταλαντωτής*

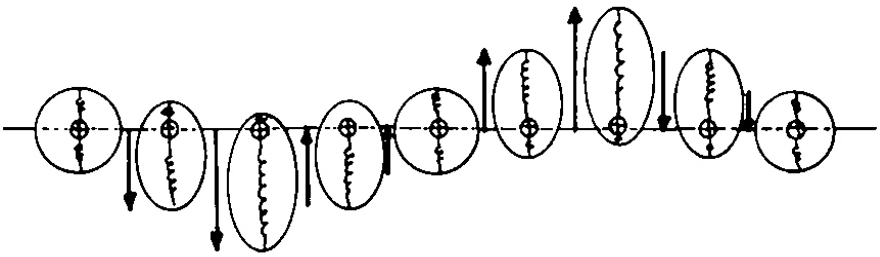
Μας είναι γνωστή η δομή του ατόμου με τη μορφή των θετικών φορτίων του πυρήνα και των αρνητικών φορτίων των ηλεκτρονικών νεφών που τον περιβάλλουν. Θεωρούμε ότι το σύστημα αυτό είναι ευσταθές δηλ. ότι το ηλεκτρονικό νέφος (των εξώτερων εδώ ηλεκτρονίων) και ο πυρήνας συνδέονται μεταξύ τους με ελαστικής φύσης ελκτικές δυνάμεις. Το γεγονός μας οδηγεί στο να υποθέσουμε (εφόσον μεταξύ τους υπάρξει μετατόπιση) ότι ασκείται ***δύναμη επαναφοράς (restoring force)*** στο ηλεκτρονικό νέφος η οποία είναι γραμμική σε σχέση με την μετατόπιση x. Η τελευταία θεωρείται πολύ μικρή προκειμένου να μην διαταραχθεί δραστικά το σύστημα πυρήνας ηλεκτρόνιο (π.χ. ένα τυπικό πλάτος ταλάντωσης του ηλεκτρονίου είναι $10^{-17}\,\mathrm{cm}$). Επομένως:

$$F = -\kappa x \tag{4.1.2.1}$$

όπου κ μια σταθερή που έχει σχέση με την ***φυσική συχνότητα ταλάντωσης*** ω_0 του συστήματος πυρήνα – ηλεκτρονίου. Πράγματι αν προς στιγμή υπάρξει μια διαταραχή, τότε το ηλεκτρονικό νέφος θα ταλαντωθεί αρμονικά με κέντρο ισορροπίας τον θετικό πυρήνα και συχνότητα ω_0 (Σχ. 4.1.2.1). Μεταξύ της κ της ω_0 και της μάζας m_e του ηλεκτρονίου υφίσταται η σχέση:

$$\omega_0 = \sqrt{\kappa / m_e} \qquad (4.1.2.2)$$

Η ύλη ενός ομογενούς και ισοτρόπου διηλεκτρικού αποτελείται από ένα τεράστιο πλήθος ατόμων ή μορίων, τα οποία κάτω από την επίδραση εξωτερικού ηλεκτρικού πεδίου έχουν τη δυνατότητα να πολωθούν. Υποθέτουμε ότι ένα αρμονικό Η/Μ μέτωπο κύματος προσπίπτει στο διηλεκτρικό. Τότε κάθε άτομο θα υποστεί τις δυνάμεις που ασκεί χρονικά το ηλεκτρικό πεδίο $E(t)$ πάνω στα αρνητικά



(Σχ. 4.1.2.1)

φορτία των ηλεκτρονίων, θεωρώντας ότι οι πυρήνες του μένουν ακίνητοι. Θα έχουμε τελικά – δεδομένου ότι το πεδίο $E(t)$ είναι αρμονικό – μια εξαναγκασμένη αρμονική ταλάντωση του ηλεκτρονικού νέφους του κάθε ατόμου σε σχέση με τον πυρήνα του. Τότε μπορούμε να πούμε ότι το σύστημα συμπεριφέρεται σαν ένας κλασσικός ***δυναμικός ταλαντωτής (forced oscillator)***. Με την υπόθεση ότι η κίνηση των αρνητικών φορτίων γίνεται στην διεύθυνση x , η δύναμη $F_e(t)$ που ασκεί το πεδίο θα είναι:

$$F_e(t) = q_e E(t) = q_e E_0 \cos \omega t \qquad (4.1.2.3)$$

και η εξίσωση που θα διέπει την κίνησή τους σύμφωνα με τον δεύτερο νόμο του Newton:

$$q_e E_0 \cos \omega t - m_e \omega_0^2 x = m_e \frac{d^2 x}{dt^2} \qquad (4.1.2.4)$$

Η (σχ. 4.1.2.4) επαληθεύεται από μία λύση της μορφής:

$$x = x_0 \cos \omega t \qquad (4.1.2.5)$$

με τη βοήθεια της οποίας προσδιορίζουμε το πλάτος x_0. Τότε η (σχ. 4.1.2.5) μπορεί να γραφεί με τη μορφή:

$$x(t) = x_0 \cos \omega t = \frac{q_e/m_e}{\omega_0^2 - \omega^2} E_0 \cos \omega t = \frac{q_e/m_e}{\omega_0^2 - \omega^2} E(t) \qquad (4.1.2.6)$$

που μας δίνει τη μετατόπιση του ηλεκτρονικού νέφους σε σχέση με τον θετικό πυρήνα. Χωρίς την επίδραση της εξωτερικής δύναμης $F_e(t)$ το ηλεκτρονικό νέφος κατά τα γνωστά θα έχει τη δυνατότητα να ταλαντώνεται με συχνότητα ω_0. Επίσης από τη (σχ. 4.1.2.6) βλέπουμε ότι για συχνότητες $\omega < \omega_0$ τα $x(t)$ και $E(t)$ θα βρίσκονται σε φάση ενώ για $\omega > \omega_0$ θα έχουν διαφορά φάσης 180^0.

Υποθέτουμε ότι στο διηλεκτρικό υπάρχουν N άτομα ανά μονάδα όγκου και κατά προέκταση ότι υπάρχουν και N ταλαντούμενα ηλεκτρόνια. Με δεδομένο ότι η πόλωση είναι μόνο ηλεκτρονική, το μέτρο της πόλωσης **P** του διηλεκτρικού (σχ. 4.1.1.3) θα δίνεται από τη:

$$P = q_e x N \qquad (4.1.2.7)$$

(όπου x η εκάστοτε απόσταση μεταξύ του κέντρου βάρους των θετικών φορτίων και του ηλεκτρονικού νέφους) οπότε με βάση τη (σχ. 4.1.2.6):

$$P = \frac{q_e^2 N E(t)/m_e}{\omega_0^2 - \omega^2} \qquad (4.1.2.8)$$

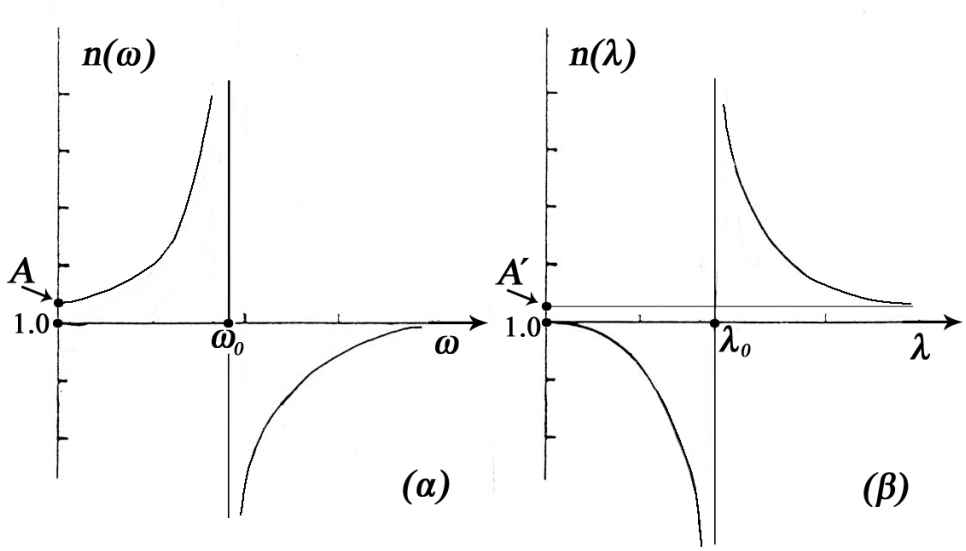
Τελικά με τη βοήθεια της (σχ. 4.1.1.12) και το γεγονός ότι $n^2 = k_e$ βρίσκουμε:

$$n^2(\omega) = 1 + \frac{N q_e^2}{\varepsilon_0 m_e}\left(\frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2}\right) \qquad (4.1.2.9)$$

που αντιστοιχεί σε μια απλή ***εξίσωση διασκεδασμού (dispersion equation)*** για ένα διηλεκτρικό ομογενές και ισότροπο, με μια συχνότητα συντονισμού ω_0. Συνήθως εφαρμόζεται με καλό αποτέλεσμα για αέρια διηλεκτρικά και μάλιστα αραιά. Ενώ για αντίστοιχα πυκνά αέρια διηλεκτρικά και υγρά καθώς και στερεά ισχύει κατά προσέγγιση. Αυτό το οποίο μπορούμε να συμπεράνουμε από τη (σχ. 4.1.2.9) είναι ότι για $\omega_0^2 > \omega^2$, δηλαδή όταν η συχνότητα ταλάντωσης ω του διαδιδόμενου Η/Μ κύματος είναι αρκετά μικρότερη από τη συχνότητα συντονισμού ω_0 των ατόμων του διηλεκτρικού, ο δ.δ. του είναι μεγαλύτερος της μονάδας (Σχ. 4.1.2.2α). Στο όριο για $\omega \to 0$ η τιμή του n από τη (σχ. 4.1.2.9) θα είναι $\sqrt{1 + \left(N q_e^2/\varepsilon_0 m_e \omega_0^2\right)}$ (σημείο A στον άξονα $n(\omega)$) και για $\omega \to \infty$, $n \to 1.0$.

Επίσης η (σχ. 4.1.2.9) είναι δυνατόν να εκφραστεί συναρτήσει του μ.κ. λ, αρκεί να εφαρμόσουμε τις πολύ γνωστές σχέσεις: $c = \lambda\nu$ και $\omega = 2\pi\nu$. Τότε παίρνει τη μορφή:

$$n^2(\lambda) = 1 + \frac{Nq_e^2}{\varepsilon_0 m_e}\frac{\lambda_0^2}{(2\pi c)^2}\frac{\lambda^2}{(\lambda^2 - \lambda_0^2)} \qquad (4.1.2.10)$$



(Σχ.4.1.2.2)

της οποίας η γραφική παράσταση δίνεται στο (Σχ. 4.1.2.2β). Για $\lambda \to 0$ $n \to 1.0$ και

για $\lambda \to \infty$ η τιμή του n θα είναι $\sqrt{1 + \frac{Nq_e^2}{\varepsilon_0 m_e}\frac{\lambda_0^2}{(2\pi c)^2}}$ (σημείο A' στον άξονα $n(\lambda)$).

4.2 *Ομαλός και ανώμαλος διασκεδασμός. Απορρόφηση του φωτός και νόμος του Beer. Δείκτης διάθλασης για πυκνά διηλεκτρικά: Εξίσωση των Clausius – Mossotti*

4.2.1 *Διασκεδασμός και απορρόφηση του φωτός*

Γίνεται φανερό από τη (σχ. 4.1.2.9) ότι όταν η συχνότητα του προσπίπτοντος πεδίου γίνει ίση με τη φυσική συχνότητα ταλάντωσης των ατόμων του διηλεκτρικού (δηλ. όταν $\omega = \omega_0$), υπάρχει σαφής ασυνέχεια, η οποία δεν ερμηνεύεται αποκλειστικά με βάση τις υποθέσεις κατάστρωσης της εξίσωσης της (σχ. 4.1.2.4). Για να αρθεί η ασυνέχεια θα πρέπει να υποθέσουμε ότι στο ηλεκτρονικό νέφος εκτός

από την εξωτερική δύναμη και τη δύναμη επαναφοράς, δρα και μια τρίτη η οποία είναι ανάλογη της ταχύτητας μετατόπισης του φορτίου. Πράγματι μια τέτοια δύναμη θα πρέπει να εκδηλώνεται στα υγρά και στερεά διηλεκτρικά καθώς και για τα αέρια τα οποία θεωρούνται πυκνά. Το γεγονός αυτό είναι αποτέλεσμα του ότι τα μόρια των στερεών, των υγρών και των αερίων σε υψηλές πιέσεις$\left(\simeq 10^3 \text{atm}\right)$, βρίσκονται σε αποστάσεις τουλάχιστον δέκα φορές μικρότερες από ότι θα βρισκόταν τα μόρια ενός αερίου σε κανονικές συνθήκες πίεσης. Η δύναμη αυτή είναι μια δύναμη τριβής μεταξύ των ατόμων με συνέπεια η (σχ. 4.1.2.4) να πάρει τη μορφή:

$$m_e \frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} + m_e\omega_0^2 x = q_e E_0 e^{i\omega t} \tag{4.2.1.1}$$

Όπου εδώ το πεδίο $E(t) = E_0 e^{i\omega t}$ όπως και η μετατόπιση $x(t)$ του ηλεκτρονικού νέφους γράφονται σε μιγαδική μορφή για διευκόλυνση των πράξεων κατά τη διαδικασία επίλυσης της (σχ. 4.2.1.1). Αν όπως και προηγούμενα η $x = x_0 e^{i\omega t}$ είναι λύση της (σχ. 4.2.1.1) τότε αποδεικνύεται (ΠΑΡ/ΜΑ 1) ότι:

$$\tilde{n}^2(\omega) = 1 + \frac{Nq_e^2}{\varepsilon_0 m_e}\left(\frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\gamma\omega}\right) \tag{4.2.1.2}$$

όπου $\tilde{n}(\omega)$ ο λεγόμενος ***μιγαδικός δ.δ.*** του διηλεκτρικού και $\gamma = b/m_e$. Ο $\tilde{n}(\omega)$ είναι δυνατόν να γραφεί με την μορφή:

$$\tilde{n}(\omega) = n(\omega) - i\kappa(\omega) \tag{4.2.1.3}$$

όπου $n(\omega)$ είναι ο ***δ.δ. του μέσου (refraction index)*** και $\kappa(\omega)$ ο ***συντελεστής απόσβεσης (extinction coefficient)***. Όπως θα δούμε αμέσως μετά ο $\kappa(\omega)$ συνδέεται με τον συντελεστή απορρόφησης a του υλικού και σχετίζεται με την εξασθένιση ενός κύματος όταν αυτό διαδίδεται μέσα σε διηλεκτρικό δηλ. με ***φαινόμενα απορρόφησης***.

Για να παράγουμε κατ' αρχή τις αναλυτικές εκφράσεις των $n(\omega)$ και $\kappa(\omega)$ θ' αναφερθούμε σ' ένα διηλεκτρικό με τη μορφή όχι και τόσο πυκνού αερίου που προϋποθέτει τιμή δ.δ. περίπου ίση με την μονάδα και για την περιοχή κοντά στη συχνότητα συντονισμού. Τότε αυτές (βλ. ΠΑΡ/ΜΑ 1) για την περιοχή που αναφέραμε όπου $|\omega_0 - \omega| \ll \omega_0$ δίνονται από τις σχέσεις:

$$n(\omega)=1+\frac{Nq_e^2}{4\varepsilon_0 m_e\omega_0}\frac{\omega_0-\omega}{(\omega_0-\omega)^2+(\gamma/2)^2} \tag{4.2.1.4}$$

$$\kappa(\omega)=\frac{Nq_e^2}{8\varepsilon_0 m_e\omega_0}\cdot\frac{\gamma}{(\omega_0-\omega)^2+(\gamma/2)^2} \tag{4.2.1.5}$$

Από τη (σχ. 4.2.1.5) για $\omega=\omega_0$ θα έχουμε:

$$\kappa(\omega)=\kappa(\omega)_{\max} \text{ και } \kappa(\omega)_{\max}=\frac{Nq_e^2}{2\varepsilon_0 m_e\omega_0\gamma} \tag{4.2.1.6}$$

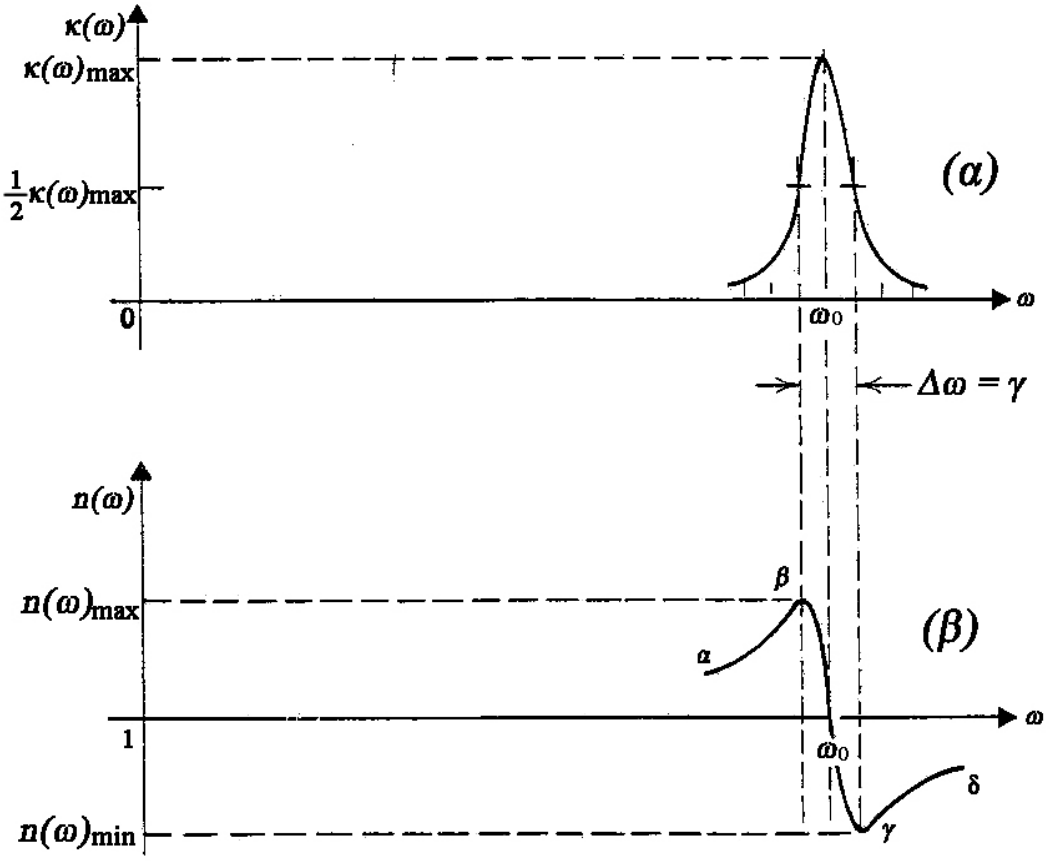
Όταν $\omega=\omega_0\pm\gamma/2\Rightarrow\kappa(\omega)=\kappa(\omega)_{\max}/2$ και το $\Delta\omega$ στο μισό του μεγίστου γίνεται: $\Delta\omega=2(\gamma/2)=\gamma$. Επειδή επίσης $\omega_0/\gamma\gg 1$ (συνθήκη αραιού αερίου) τότε $\Delta\omega\ll\omega_0$ (Σχ. 4.2.1.1α). Στα σημεία του μισού μεγίστου του $\kappa(\omega)$, ο $n(\omega)$ παίρνει τη μέγιστη και την ελάχιστή του τιμή. Δηλ:

$$n(\omega)_{\max}=1+\frac{Nq_e^2}{4\varepsilon_0 m_e\omega_0\gamma} \quad \text{όταν} \quad \omega=\omega_0-\frac{\Delta\omega}{2}=\omega_0-\frac{\gamma}{2} \tag{4.2.1.7}$$

$$n(\omega)_{\min}=1-\frac{Nq_e^2}{4\varepsilon_0 m_e\omega_0\gamma} \quad \text{όταν} \quad \omega=\omega_0+\frac{\Delta\omega}{2}=\omega_0+\frac{\gamma}{2} \tag{4.2.1.8}$$

όπως αυτό φαίνεται στο (Σχ. 4.2.1.1β). Από τη (σχ. 4.2.1.4) είναι δυνατόν να διαπιστώσουμε ότι όταν $\omega\simeq\omega_0$ δηλ. η συχνότητα της διαδιδόμενης Η/Μ διαταραχής πλησιάζει αυτή της συχνότητας συντονισμού των ατόμων του διηλεκτρικού ((Σχ. 4.2.1.1β) περιοχή $\beta\gamma$ της καμπύλης $n(\omega)$), τότε θα είναι: $(\omega_0-\omega)^2\ll$ και $n(\omega)\simeq 1+\frac{Nq_e^2}{4\varepsilon_0 m_e\omega_0(\gamma/2)^2}(\omega-\omega_0)$ οπότε $dn/d\omega<0$. Αυτή ακριβώς η περιοχή (όπου η κλίση της $n(\omega)$ είναι αρνητική) ονομάζεται περιοχή ***ανώμαλου διασκεδασμού (anomalous (abnormal) dispersion)*** και η περιοχή γύρω από την ω_0 ***ταινία απορρόφησης (absorption band)***. Μέσα δηλ. σ' αυτήν την περιοχή συχνοτήτων έχουμε τις μέγιστες τιμές του συντελεστή απόσβεσης και κατά προέκταση του συντελεστή απορρόφησης. Τότε το διηλεκτρικό απορροφά τελείως την προσπίπτουσα Η/Μ ακτινοβολία αυξάνοντας την εσωτερική του ενέργεια.

Όταν $\omega_0 - \omega > (\gamma/2)$ τότε θα έχουμε $(\omega_0 - \omega)^2 \gg (\gamma/2)^2$ οπότε: $n(\omega) \simeq 1 + \frac{Nq_e^2}{4\varepsilon_0 m_e \omega_0} \frac{1}{(\omega_0 - \omega)}$ και $dn/d\omega > 0$. Τότε η συνάρτηση $n(\omega)$ είναι αύξουσα. Η περιοχή αυτή (Σχ. 4.2.1.1β τμήμα $\alpha\beta$ της καμπύλης) ονομάζεται περιοχή ***ομαλού διασκεδασμού (normal dispersion)*** και είναι το τμήμα της καμπύλης που μας ενδιαφέρει περισσότερο από πρακτική άποψη για ένα συγκεκριμένο διηλεκτρικό κατά



(Σχ. 4.2.1.1)

την μελέτη του δ.δ. του. Αύξουσα μεταβολή παρουσιάζει η $n(\omega)$ και για $\omega > \omega_0 + \gamma/2$ όπου $n = n_{\min}$. Η περιοχή αυτή (Σχ. 4.2.1.1β, τμήμα $\gamma\delta$ της καμπύλης) αν και ανήκει σε περιοχή του ομαλού διασκεδασμού εντούτοις παρουσιάζει μια ιδιομορφία η οποία περιγράφεται στα επόμενα.

Το γεγονός όπου γενικά $\omega > \omega_0$, εμφανίζεται στην περίπτωση για την οποία π.χ. φωτίζουμε ένα κοινό γυαλί (για το οποίο γνωρίζουμε ότι απορροφά στην υπεριώδη περιοχή του Η/Μ φάσματος) με μια δέσμη ακτίνων –Χ. Τότε πράγματι $\omega > \omega_0$ και με τη βοήθεια του τύπου του διασκεδασμού (σχ. 4.2.1.4) διαπιστώνουμε

ότι $n<1$. Όμως από τον ορισμό του n προκύπτει: $\upsilon_{ph}>c$. Δηλ. εμφανίζεται ένα αποτέλεσμα το οποίο παραβιάζει την αρχή της ειδικής θεωρίας της σχετικότητας σύμφωνα με την οποία: *Δεν υπάρχει ταχύτητα στη φύση που να υπερβαίνει την ταχύτητα του φωτός*. Συμβαίνει δηλ. να έχουμε η ταχύτητα φάσης υ_{ph} των διαδιδόμενων διαταραχών στο εσωτερικό του υλικού να υπερβαίνει την ταχύτητα του φωτός. Το γεγονός αυτό όντως ισχύει στην πραγματικότητα χωρίς όμως να συνεπάγεται ότι παραβιάζεται η προαναφερόμενη αρχή.

Πράγματι η ταχύτητα φάσης είναι αυτή με την οποία κινείται ένα οποιοδήποτε σημείο (σταθερής φάσης) μιας π.χ. αρμονικής διαταραχής την οποία όμως θεωρούμε ότι είναι απείρου μήκους και άπειρης διάρκειας. Μια τέτοια βέβαια διαταραχή δεν συνιστά με κανέναν τρόπο 'πληροφορία'. Θα μπορούσαμε να πούμε ότι πρόκειται περισσότερο για μαθηματική έννοια. Προκειμένου να συντεθεί και κατά προέκταση να διαδοθεί πληροφορία, θα πρέπει οπωσδήποτε να υπάρξει μία οποιασδήποτε μορφής 'αλλοίωση' της αρμονικής διαταραχής. Ένα τέτοιο γεγονός συμβαίνει π.χ. όταν αντί για μία, διαδώσουμε στην ίδια διεύθυνση δύο αρμονικές διαταραχές με παραπλήσιες συχνότητες. Τότε όμως αποδεικνύεται (βλ.§ 4.5.2), ότι η επαλληλία των δύο διαταραχών αναδεικνύει μια συνισταμένη διαταραχή με μορφή ***διακροτημάτων (beats)***. Η ταχύτητα των τελευταίων, η οποία ονομάζεται ***ταχύτητα ομάδος (group velocity)*** υ_g διαφοροποιείται ριζικά κατά μέτρο από τις ταχύτητες φάσης των δύο συνιστωσών και αποδεικνύεται ότι είναι πάντα μικρότερη από αυτές (βλ.§ 4.5.3). Το διακρότημα είναι αυτό που για την προαναφερόμενη περίπτωση συνιστά την 'πληροφορία', δηλ. το διαδιδόμενο σήμα το οποίο κομίζει μια συγκεκριμένη ενέργεια. Είναι λοιπόν τελικά η ταχύτητα διάδοσης αυτού του σήματος που δεν μπορεί να υπερβεί την ταχύτητα του φωτός ακόμη και αν οι συνιστώσες αρμονικές διαταραχές διαδίδονται στο κενό, δηλ. σε μέσο που υποτίθεται ότι δεν παρουσιάζει διασκεδασμό. Στην περίπτωση βέβαια που το μέσο παρουσιάζει διασκεδασμό η ταχύτητα υ_g του σήματος δεν θα εξαρτάται μόνο από το δείκτη διάθλασης n (δηλ. από την ταχύτητα φάσης) αλλά και από την μεταβολή του ως προς τη συχνότητα (βλ. § 4.5.4).

4.2.2 *Νόμος του Beer*

Συνήθως στις πρακτικές εφαρμογές μας ενδιαφέρει όχι η εξασθένιση του πλάτους της Η/Μ διαταραχής αλλά αυτή της έντασης I της ακτινοβολίας κατά τη διάδοση σ' ένα διηλεκτρικό. Αν λοιπόν ένα επίπεδο μέτωπο κύματος, έντασης $I=I_0$ στη θέση $z=0$ μιας επίπεδης πλάκας διηλεκτρικού διαδοθεί στο εσωτερικό της κατά dz τότε η σχετική εξασθένισή της dI/I θα δίνεται από τη σχέση:

$$\frac{dI}{I} = -adz \tag{4.2.2.1}$$

όπου a είναι ο ***συντελεστής απορρόφησης (absorption coefficient)*** του υλικού και παριστάνει τη σχετική εξασθένιση της δέσμης όταν αυτή διανύσει μήκος ίσο με τη μονάδα. Η ολοκλήρωση της (σχ. 4.2.2.1) για $z = 0$, $I = I_0$ μας οδηγεί στο γνωστό νόμο του Beer:

$$I = I_0 e^{-az} \tag{4.2.2.2}$$

Αν συγκρίνουμε τον εκθέτη της (σχ. 4.2.2.2) με αυτόν της (σχ. 1.9) του (ΠΑΡ/ΜΑΤΟΣ 1) βρίσκουμε ότι:

$$a = 4\pi\kappa/\lambda_0 \tag{4.2.2.3}$$

όπου κ ο συντελεστής απόσβεσης.

4.2.3 *Δείκτες διάθλασης για πυκνά διηλεκτρικά. Εξίσωση των Clausius – Mossotti*

Οι εξισώσεις διασκεδασμού ((σχ. 1.12) και (σχ. 1.13) του ΠΑΡ/ΜΑΤΟΣ 1)) καθώς και οι αντίστοιχες απλοποιημένες (σχ. 4.2.1.4) και (σχ. 4.2.1.5), παρά το ότι μπορούν κατά προσέγγιση να εφαρμοστούν για υγρά και στερεά διηλεκτρικά, περιγράφουν στην πραγματικότητα με ακρίβεια μόνον αέρια και μάλιστα αρκετά αραιά, παρά το ότι έχει ληφθεί υπόψη η υπόθεση για τις αναπτυσσόμενες δυνάμεις τριβής κατά τη διαδικασία της ταλάντωσης των ηλεκτρονικών νεφών. Προκειμένου όμως για πυκνά διηλεκτρικά, εκτός από τους άλλους παράγοντες που πρέπει να θεωρήσουμε για την κατάστρωση της εξίσωσης κίνησης του αρμονικού ταλαντωτή, θα πρέπει να λάβουμε υπόψη μας και έναν άλλο πεδιακό παράγοντα.

Πράγματι όταν τα άτομα είναι πολύ κοντά μεταξύ τους το καθένα από αυτά δέχεται τη δράση των γειτονικών του με συνέπεια στη θέση που βρίσκεται το κάθε άτομο να υφίσταται ένα πρόσθετο ηλεκτρικό πεδίο. Το συγκεκριμένο πεδίο για ομογενή και ισότροπα μη πολικά διηλεκτρικά (καθώς και γι' ανισότροπα του κυβικού συστήματος) υπολογίστηκε από τον Lorentz και έχει την τιμή $P/3\varepsilon_0$, όπου P η πόλωση του διηλεκτρικού. Άρα όταν σ' ένα διηλεκτρικό έχουμε την επίδραση ενός πεδίου $E(t)$, τότε το συνολικό τοπικό πεδίο E_L (πεδίο Lorentz) θα έχει την τιμή:

$$E_L = E(t) + P(t)/3\varepsilon_0 \tag{4.2.3.1}$$

όπου κατά τα γνωστά: $P(t) = \chi\varepsilon_0 E(t)$. Τότε η μονοδιάστατη εξίσωση κίνησης του αρμονικού ταλαντωτή παίρνει τη μορφή:

$$\frac{d^2P}{dt^2} + \gamma\frac{dP}{dt} + \omega_0^2 P = \frac{Nq_e^2}{m_e}\left(E + \frac{P}{3\varepsilon_0}\right) \tag{4.2.3.2}$$

Η διηλεκτρική σταθερή k_e θα δίνεται από τη σχέση:

$$k_e = \varepsilon_0 + \frac{Nq_e^2/m_e}{\omega_0^2 - \omega^2 - \dfrac{Nq_e^2}{3\varepsilon_0 m_e} + i\gamma\omega} \tag{4.2.3.3}$$

και ο μιγαδικός δ.δ. $\tilde{n}$ από την:

$$\tilde{n}^2 = 1 + \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2 - \left(\omega_p^2/3\right) - \omega^2 + i\gamma\omega} \tag{4.2.3.4}$$

όπου $\omega_p^2 = Nq_e^2/\varepsilon_0 m_e$ είναι η λεγόμενη ***συχνότητα πλάσματος (plasma frequency)***. Η εξίσωση που μας δίνει η (σχ. 4.2.3.4) μπορεί να γραφεί με την ίδια μαθηματική μορφή όπως η (σχ. 4.2.1.2) και η οποία αφορά το δ.δ. των αραιών αερίων. Αυτό γίνεται ορίζοντας μια νέα συχνότητα συντονισμού την ω_m ως εξής:

$$\omega_m^2 = \omega_0^2 - \frac{\omega_p^2}{3} \tag{4.2.3.5}$$

Οπότε το γεγονός ότι διαπραγματευόμαστε ένα πυκνό οπτικό μέσο δηλ. ένα μέσο στο οποίο τα γειτονικά μόρια αλληλεπιδρούν, συνεπάγεται την ελάττωση της συχνότητας συντονισμού σε σχέση μ' αυτήν των ελεύθερων μορίων. Από φυσική άποψη, η μετατόπιση αυτής της συχνότητας μπορεί να κατανοηθεί θεωρώντας ότι τα γειτονικά μόρια στο πυκνό μέσο ταλαντεύονται από κοινού. Δηλ. το ηλεκτρικό πεδίο λόγω των παρακειμένων μορίων ενεργεί ενάντια στην δύναμη επαναφοράς του ταλαντωτή ελαττώνοντας την ενεργό 'σταθερή του ελατηρίου' κ.

Αποδεικνύεται ότι για μη πολικά διηλεκτρικά και για μία συχνότητα συντονισμού ω_m ο δ.δ. δίνεται από την εξίσωση των Clausius – Mossotti:

$$\frac{n^2-1}{n^2+2}=\frac{Nq_e^2}{3\varepsilon_0 m_e}\cdot\frac{1}{\omega_m^2-\omega^2+i\gamma\omega} \qquad (4.2.3.6)$$

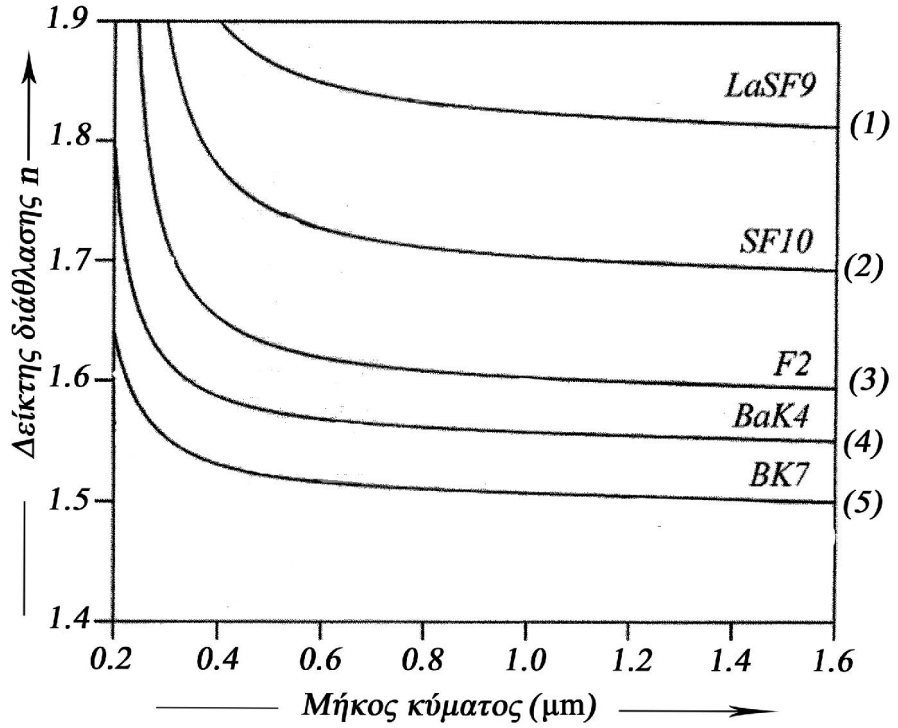
	λ (nm)	Φασματικές γραμμές	BK7	BaK2	BaK4	F2	SF10	IRGN6	LaSFN9	Τετηγμένος χαλαζίας (Fused Silica)
1	280		1.5612	1.5914	1.6289	1.7474		1.9495	2.0601	1.494
2	290		1.5567	1.5862	1.6224	1.7307		1.8624	2.0318	1.4905
3	300		1.5529	1.5816	1.6169	1.717		1.7974	2.0085	1.4875
4	310		1.5495	1.5776	1.6121	1.7055		1.7488	1.9892	1.4848
5	320		1.5465	1.5741	1.6079	1.6959		1.7124	1.9729	1.4824
6	334.1		1.5427	1.5698	1.6028	1.6845		1.6759	1.954	1.4795
7	350		1.5392	1.5656	1.598	1.6742		1.6488	1.9369	1.4766
8	365	$\mathbf{n_i}$	1.5363	1.5622	1.5941	1.6662		1.632	1.9237	1.4743
9	370		1.5354	1.5612	1.5929	1.6639	1.7978	1.6277	1.9199	1.4736
10	380		1.5337	1.5593	1.5907	1.6595	1.7905	1.6206	1.9128	1.4723
11	390		1.5322	1.5576	1.5887	1.6557	1.784	1.6151	1.9065	1.4711
12	400		1.5308	1.556	1.5869	1.6521	1.7783	1.6107	1.9009	1.47
13	404.7	$\mathbf{n_h}$	1.5302	1.5552	1.5861	1.6506	1.7758	1.609	1.8984	1.4695
14	420		1.5284	1.5531	1.5837	1.6461	1.7685	1.6044	1.8912	1.4681
15	435.8	$\mathbf{n_g}$	1.5267	1.5512	1.5815	1.642	1.762	1.601	1.8847	1.4667
16	460		1.5244	1.5486	1.5785	1.6368	1.7537	1.5974	1.8763	1.4649
17	480	$\mathbf{n_{F'}}$	1.5228	1.5468	1.5765	1.6331	1.748	1.5954	1.8706	1.4636
18	486.1	$\mathbf{n_F}$	1.5224	1.5463	1.5759	1.6321	1.7465	1.5948	1.869	1.4632
19	500		1.5214	1.5452	1.5747	1.6299	1.7432	1.5937	1.8656	1.4625
20	546.1	$\mathbf{n_e}$	1.5187	1.5421	1.5712	1.6241	1.7343	1.591	1.8565	1.4603
21	580		1.5171	1.5403	1.5692	1.6207	1.7292	1.5895	1.8513	1.4589
22	587.6	$\mathbf{n_d}$	1.5168	1.54	1.5688	1.62	1.7282	1.5892	1.8503	1.4587
23	620		1.5155	1.5386	1.5673	1.6175	1.7244	1.588	1.8463	1.4576
24	632.8	$\mathbf{n_{632.8}}$	1.5151	1.5381	1.5667	1.6166	1.7231	1.5876	1.8449	1.4572
25	643.8	$\mathbf{n_{C'}}$	1.5147	1.5377	1.5662	1.6158	1.722	1.5872	1.8438	1.4569
26	656.3	$\mathbf{n_C}$	1.5143	1.5372	1.5658	1.615	1.7209	1.5868	1.8426	1.4566
27	660		1.5142	1.5371	1.5656	1.6148	1.7205	1.5867	1.8422	1.4565
28	700		1.5131	1.5358	1.5642	1.6126	1.7173	1.5855	1.8388	1.4555
29	1060	$\mathbf{n_{1060}}$	1.5067	1.5292	1.5569	1.6019	1.7023	1.5783	1.8229	1.4498
30	1529.6	$\mathbf{n_{1529.6}}$	1.5009	1.5228	1.5512	1.5951	1.6938	1.5721	1.8137	1.4442
31	1970.1	$\mathbf{n_{1970.1}}$	1.4951	1.5188	1.5458	1.5896	1.6875	1.5666	1.8068	1.4384
32	2325.4	$\mathbf{n_{2325.4}}$	1.4897	1.5141	1.541	1.5848	1.6822	1.5617	1.801	1.433

(Πίν. 4.2.3.1)

Για την περιοχή του ομαλού διασκεδασμού δηλ. σε περιοχές που η απορρόφηση θεωρείται αμελητέα ($\omega_m^2 - \omega^2 \gg \gamma\omega$) η (σχ. 4.2.3.6) απλοποιείται στην:

$$\frac{n^2-1}{n^2+2} = \frac{Nq_e^2}{3\varepsilon_0 m_e} \cdot \frac{1}{\omega_m^2 - \omega^2} \qquad (4.2.3.7)$$

Στον (Πίν. 4.2.3.1) δίνονται οι τιμές των δ.δ. για ορισμένα από τα περισσότερο χρησιμοποιούμενα σήμερα γυαλιά με τις εμπορικές τους ονομασίες (π.χ. BK7, SF10,F2 κ.τ.λ.). Από τα υλικά αυτά κατασκευάζεται το σύνολο σχεδόν των οπτικών εξαρτημάτων (φακοί, πρίσματα, οπτικές ίνες κ.λ.π.) που χρησιμοποιούνται για εφαρμογές στις περιοχές UVB, UVA, VIS και στην κοντινή υπέρυθρη περιοχή του Η/Μ φάσματος. Επίσης στο (Σχ. 4.2.3.2) φαίνονται οι καμπύλες διασκεδασμού για

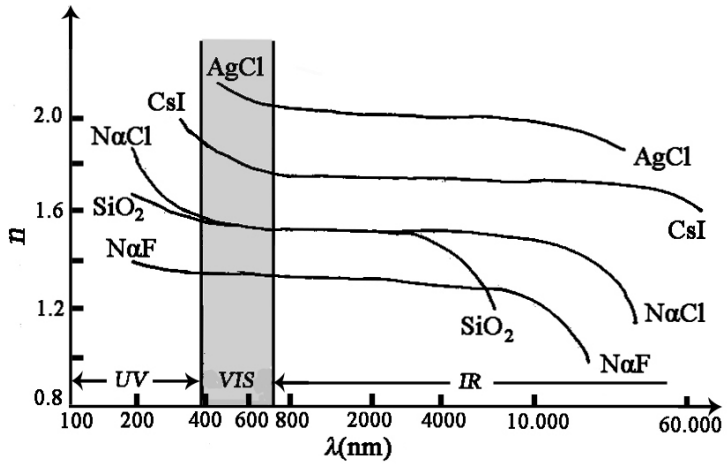


(1) πυκνή πυριτύαλος Λανθανίου (LaSF9), (2) πυκνή πυριτύαλος (SF10), (3) πυριτύαλος (F2), (4) στεφανύαλος Βαρίου (BaK4), (5) Βοριοπυριτιακή στεφανύαλος (BK7)

(Σχ. 4.2.3.2)

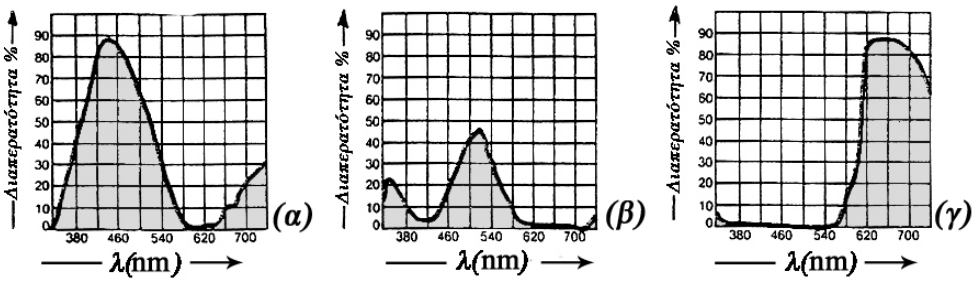
ορισμένα από αυτά μεταξύ 200 και 1600 nm. Από πρακτική τώρα άποψη τα διαφανή διηλεκτρικά (π.χ. γυαλιά) έχουν συχνότητες συντονισμού έξω από την ορατή περιοχή του Η/Μ φάσματος. Οι περιοχές αυτές βρίσκονται σε μ.κ. γύρω στα 100 nm. Αυτό σημαίνει ότι για ένα κοινό γυαλί (π.χ. τα τζάμια από τα παράθυρά του σπιτιού μας (soda lime)) από ένα πάχος και μετά αποκόπτουν τις υπεριώδεις ακτι-

νοβολίες. Δεν συμβαίνει όμως το ίδιο και με τις υπέρυθρες ακτινοβολίες οι οποίες μπορούν να το διαπεράσουν. Όταν όμως κατά την κατασκευή του γυαλιού στο εσωτερικό του παγιδευτούν περιοχές με νερό (μικροσκοπικά εγκλείσματα) τότε το υπέρυθρο απορροφείται. Πράγματι για τις περιοχές συχνοτήτων που αντιστοιχεί το υπέρυθρο (π.χ. $10^{13} - 10^{14}$ Hz) έχουμε διπολική πόλωση με συνέπεια τα μόρια του νερού να συντονίζονται και ν' απορροφούν σ' αυτές τις συχνότητες. Το ίδιο π.χ. συμβαίνει με τα μόρια του CO_2. Στις πολύ χαμηλότερες συχνότητες των ραδιοκυμάτων $10^5 - 10^9$ Hz το γυαλί γίνεται και πάλι διαπερατό. Στο (Σχ. 4.2.3.3) δίνουμε πρόσθετα τις καμπύλες διασκεδασμού για διάφορα υλικά, για τις περιοχές από το υπεριώδες μέχρι το μακρό – υπέρυθρο.



(Σχ. 4.2.3.3)

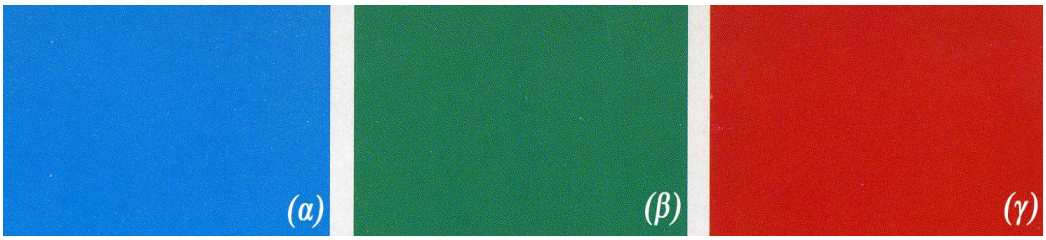
Αναφέραμε προηγουμένως και είδαμε στα διαγράμματα των (Σχ. 4.2.3.2) και (Σχ. 4.2.3.3) ότι τα διαφανή διηλεκτρικά δεν έχουν ακμές απορρόφησης στην ορατή



(Σχ. 4.2.3.4)

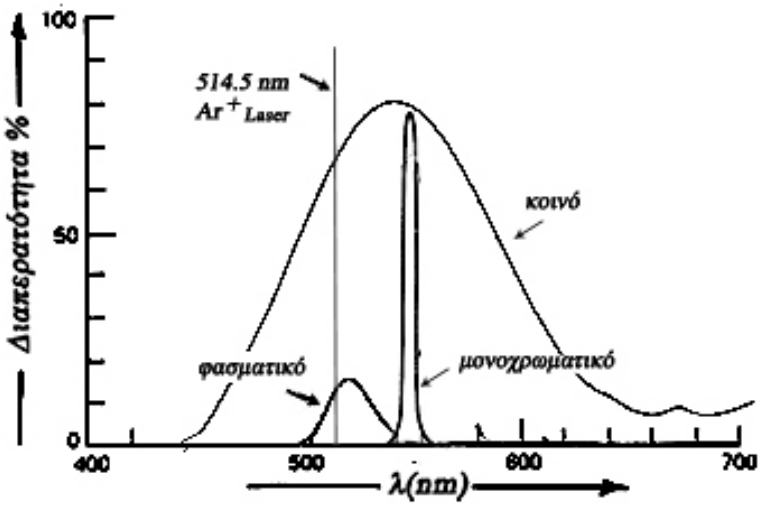
περιοχή του φάσματος. Αν όμως κατά τη διαδικασία της παρασκευής τους αναμιχθούν μ' αυτά διάφορες χρωστικές ουσίες (συνήθως οργανικά μόρια) και οι οποίες

έχουν ακμές ή ταινίες απορρόφησης σ' αυτήν την περιοχή, τότε παίρνουμε τα γνωστά μας έγχρωμα γυαλιά. Τα ίδια ακριβώς ισχύουν και κατά την ανάμιξη χρωστικών σε σελουλόζη ή άλλης μορφής πλαστικά με συνέπεια να προκύπτουν οι έγχρωμες ζελατίνες. Στο (Σχ. 4.2.3.4) βλέπουμε τις καμπύλες διαπερατότητας (%) συναρτήσει του μ.κ. λ που αντιστοιχούν σε τρία υλικά (έγχρωμα φίλτρα) που μας



(Εικ. 4.2.3.5)

δίνουν χρωματικά: (α) Το λαμπερό μπλε (μπλε – ηλεκτρίκ) (bright blue), (β) το πράσινο του βρύου (moss green) και (γ) το έντονο κόκκινο (της φωτιάς) (fire). Π.χ για να εμφανιστεί το χρώμα του φίλτρου (β) θα πρέπει να έχουμε εκτεταμένες ζώνες απορρόφησης στις ιώδες – μπλε περιοχές του φάσματος καθώς και στις κίτρινο–κόκκινες περιοχές όπως αυτό φαίνεται από την καμπύλη διαπερατότητας του. Στις (Εικ. 4.2.3.5α,β,γ), μπορούμε να δούμε τις χρωματικότητες που εμφανίζουν τα τρία προαναφερόμενα φίλτρα από τη μια τους όψη, όταν από την άλλη τους φωτισ-



(Σχ. 4.2.3.6)

τεί όλη τους η επιφάνεια από μια δέσμη λευκού φωτός.

Μια όχι πολύ αυστηρή θεώρηση αυτού του είδους των φίλτρων, τα κατατάσσει σε ***κοινά (common), φασματικά (spectrum)*** και ***μονοχρωματικά (mono-***

chromatic) ανάλογα με το εύρος των μ.κ. (φασματικό εύρος ή ζώνη διέλευσης) που επιτρέπουν να περάσει δια μέσου τους. Π.χ. για τα μονοχρωματικά λεγόμενα φίλτρα, το εύρος αυτό θα πρέπει να είναι μικρότερο από 10nm. Στο (Σχ. 4.2.3.6) φαίνονται οι καμπύλες διαπερατότητας (%) τριών τέτοιων φίλτρων στην πράσινη περιοχή του ορατού φάσματος. Στο ίδιο σχήμα εμφανίζεται και η γραμμή εκπομπής του Laser Ar^+ (αερίου Αργού) σε μ.κ. $\lambda = 514.5\text{nm}$ της οποίας το φασματικό εύρος είναι της τάξης των $10^{-4}\,\text{nm}$.

4.3 *Ο εμπειρικός τύπος του Cauchy η ανάλυση του φωτός μέσω πρίσματος και η εξίσωση του Sellmeier*

4.3.1 *Ο τύπος του Cauchy*

Μια από τις πρώτες αναλυτικές σχέσεις διασκεδασμού (της μεταβολής δηλαδή του δ.δ. συναρτήσει του μ.κ.), προτάθηκε από τον Cauchy το 1836 και έχει τη μορφή:

$$n = A + \frac{B}{\lambda^2} + \frac{C}{\lambda^4} + \ldots \qquad (4.3.1.1)$$

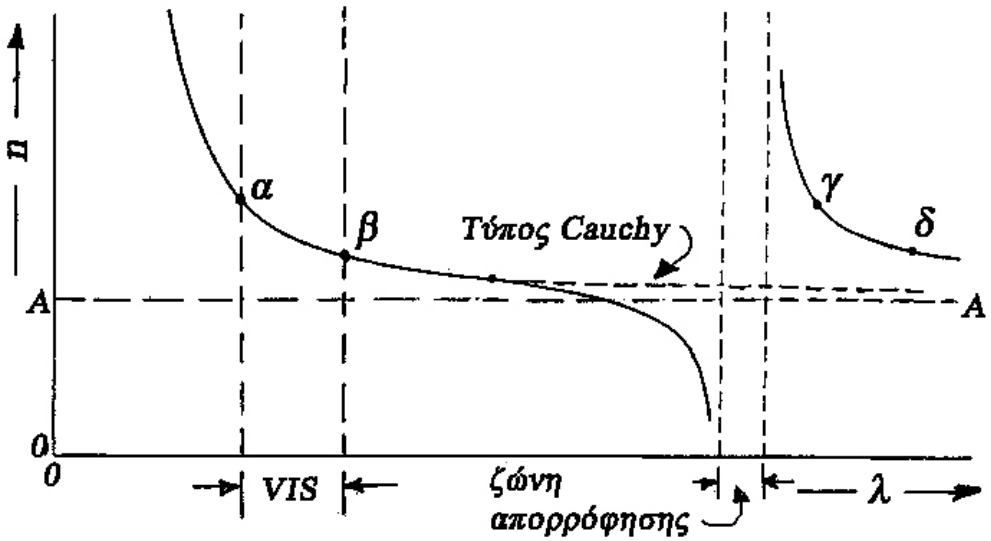
όπου A, B, C σταθερές που προσδιορίζονται πειραματικά. Πράγματι αυτό γίνεται αν μετρήσουμε το δ.δ. ενός υλικού σε τρία διαφορετικά μ.κ. και λύσουμε το σύστημα των τριών εξισώσεων με τρεις αγνώστους. Ο τύπος του Cauchy τις περισσότερες φορές εμφανίζεται να περιλαμβάνει δύο όρους:

$$n = A + \frac{B}{\lambda^2} \qquad (4.3.1.2)$$

Αν και εμπειρικός, οι διάφορες προσεγγίσεις του n με τη βοήθεια του τύπου του Cauchy, δίνουν αρκετά ακριβή αποτελέσματα για την περιοχή του ομαλού διασκεδασμού. Δεν είναι σε θέση όμως να προβλέψουν τη συμπεριφορά του υλικού στην περιοχή που εμφανίζεται απορρόφηση (ανώμαλος διασκεδασμός).

Πράγματι αν οι μετρήσεις του δ.δ. επεκταθούν και εκτός της περιοχής $\alpha\beta$ (Σχ. 4.3.1.1) του ομαλού διασκεδασμού από την ορατή προς την περιοχή του υπέρυθρου, τότε ο δ.δ. αντί κανονικά να τείνει προς την τιμή του A (για $\lambda \to \infty$), η τιμή του ελαττώνεται με πολύ γρήγορο ρυθμό μέχρις του σημείου που να μην μπορούμε να τον μετρήσουμε επειδή η ακτινοβολία εκείνης της περιοχής θα έχει απορροφηθεί. Μπορούμε να ξαναμετρήσουμε το δ.δ. για μ.κ. πέρα από την περιοχή απορρόφησης και η τιμή του θα είναι πολύ μεγαλύτερη από αυτές που μετρούσαμε

προηγουμένως. Για την περίπτωση αυτή (τμήμα $\gamma\delta$ της καμπύλης), βρισκόμαστε και πάλι στην περιοχή ομαλού διασκεδασμού, αν και τώρα οι τιμές των παραμέτρων A και B του τύπου του Cauchy είναι διαφορετικές. Το όνομα ***ανώμαλος διασκεδασμός*** προήλθε από το γεγονός ότι ο δ.δ. μετρούμενος στο σημείο γ, που αντιστοιχεί σε ένα ορισμένο μ.κ., βρέθηκε μεγαλύτερος από αυτόν που υπολογίζουμε π.χ. στο σημείο β και το οποίο αντιστοιχεί σε μικρότερο μ.κ. με βάση το γεγονός ότι στην περιοχή του ***ομαλού διασκεδασμού*** ο δ.δ. n είναι φθίνουσα συνάρτηση



(Σχ. 4.3.1.1)

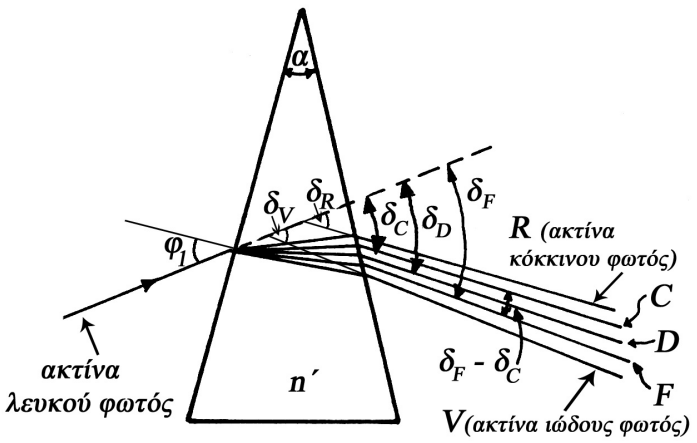
του λ. Περιοχές λοιπόν ομαλού διασκεδασμού, θα θεωρούμε εκείνες που βρίσκονται μεταξύ δύο ταινιών απορρόφησης και μάλιστα αρκετά μακριά από αυτές.

4.3.2 *Ανάλυση του φωτός μέσω πρίσματος (Τα χρώματα της ίριδας)*

Ας εξετάσουμε τώρα το αποτέλεσμα της πλάγιας πρόσπτωσης μιας ακτίνας λευκού φωτός (μια δέσμη λευκού φωτός πολύ μικρής διατομής) σε ένα ορθό ισοσκελές πρίσμα δ.δ. n' και διαθλαστικής γωνίας a (Σχ. 4.3.2.1). Τότε για όλες τις ακτινοβολίες με διαφορετικό μ.κ. που περιλαμβάνονται στην ακτίνα του λευκού φωτός, η γωνία πρόσπτωσης ϕ_1 θα είναι η ίδια. Δεν θα συμβαίνει όμως το ίδιο – όπως θα δούμε στα επόμενα – και για τις γωνίες κατά τη διάθλασή τους στο εσωτερικό του πρίσματος και κατά προέκταση στην έξοδό τους από το πρίσμα. Πράγματι λόγω του φαινομένου του διασκεδασμού, οι γωνίες διάθλασης ϕ_1' (στο εσωτερικό

του πρίσματος) των ακτίνων που αντιστοιχούν σε διαφορετικό μ.κ. θα είναι διαφορετικές με βάση το γνωστό νόμο του Snell ($\sin\phi_1' = \sin\phi_1 / n'$) επειδή ο δ.δ. n' θα είναι διαφορετικός. Συνεχίζοντας την πορεία τους, οι ακτίνες ξαναδιαθλώνται στην άλλη πλευρά του πρίσματος. Η αλληλουχία με την οποία εκτρέπονται σε συνάρτηση με το μ.κ. που αντιστοιχούν, αναλύεται στα επόμενα.

Κατ' αρχή σαν τύπο διασκεδασμού για το οπτικό μέσο του πρίσματος θα χρησιμοποιήσουμε τον τύπο του Cauchy που δίνεται από τη (σχ. 4.3.1.2) $n' = A + B/\lambda^2$. Επίσης για τις ακτίνες του λευκού φωτός με ακραία μ.κ. λ_R, λ_V (κόκκινο και ιώδες φως) θα έχουμε ως γνωστόν: $\lambda_R > \lambda_V$. Θεωρούμε τέλος – χωρίς αυτό να επηρεάζει τη γενικότητα των συμπερασμάτων μας – ότι το πρίσμα είναι λεπτό. Κάτω από αυτές τις συνθήκες ο τύπος ο οποίος μας δίνει τις γωνίες εκτροπής δ (Σχ. 4.3.2.1) των ακτίνων φωτός για συνθήκες ελάχιστης εκτροπής (βλ. ΠΑΡ/ΜΑ 3), που αντιστοιχούν σε διαφορετικά μ.κ. θα δίνεται από την ήδη γνωστή μας (ΠΑΡ/ΜΑ 3 (σχ. 3.13): $\delta = (n' - 1)a$. Επειδή $\lambda_R > \lambda_V$ εφαρμόζοντας στον τύπο του διασκεδασμού βρίσκουμε: $n_R' < n_V'$. Και αντικαθιστώντας στον τύπο που μας δίνει τις γωνίες εκτροπής δ θα έχουμε: $\delta_R < \delta_V$. Ενδιάμεσες γωνίες εκτροπής θα κατέχουν οι ακτίνες που αντιστοιχούν σε ενδιάμεσα μ.κ. των λ_R, λ_V. Επομένως στην έξοδο από το πρίσμα, το οποίο φωτίζεται στην είσοδό του με μια δέσμη

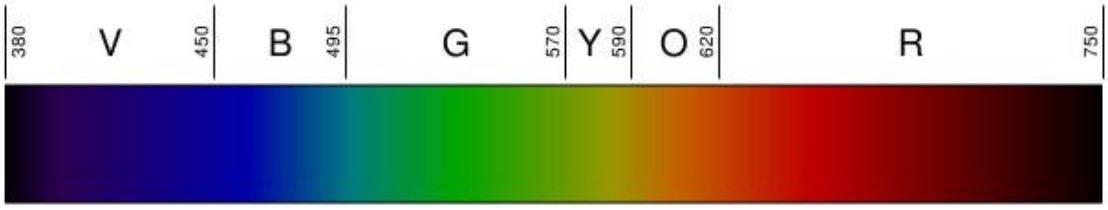


(Σχ.4.3.2.1)

λευκού φωτός, θα έχουμε την ανάπτυξη μιας βεντάλιας χρωμάτων που συντίθεται από μια συνεχή παράθεση ακτίνων φωτός με διαφορετικό μ.κ. Μικρότερη εκτροπή παρουσιάζει το κόκκινο φως ενώ μεγαλύτερη το ιώδες. Πρόκειται για το φαινόμενο της ***ανάλυσης του φωτός***. Η παράθεση των αναλυμένων χρωμάτων ονομάζεται ***φάσμα (spectrum)*** της ακτινοβολίας του λευκού φωτός. Το φάσμα αυτό είναι δυνατόν να το δούμε κοιτάζοντας με το μάτι μας στη διεύθυνση εξόδου του πρίσματος ή

να το πάρουμε με την παρεμβολή ενός πετάσματος. Παρουσιάζει τη μορφή της (Εικ. 4.3.2.2).

Συνίσταται από ένα ορισμένο αριθμό χρωματικών ενοτήτων (έξη τον αριθμό) της ίδιας χρωματικότητας (chromaticity). Πρόκειται για τα γνωστά ***χρώματα***



(Εικ. 4.3.2.2)

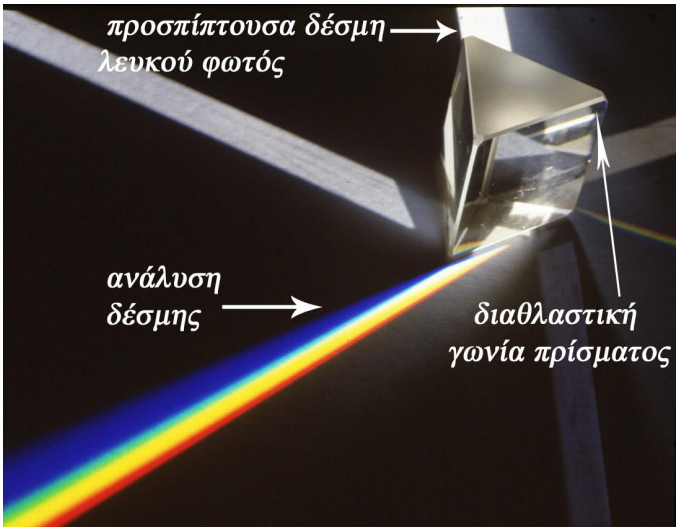
της ίριδας: Κόκκινο, πορτοκαλί, κίτρινο, πράσινο, μπλε και ιώδες. Στον (Πίν. 4.3.2.3) δίνονται τα όρια αυτών των ενοτήτων χρωμάτων σε μ.κ. και σε αντίστοιχες συχνότητες. Σε διαφορετικά συγγράμματα τα χρώματα της ίριδας αριθμούνται

ΟΡΑΤΟ ΦΩΣ		
Χρώμα	**Μήκος κύματος στο κενό (nm)**	**Συχνότητα (THz)**
Κόκκινο	780-622	384-482
Πορτοκαλί	622-597	482-503
Κίτρινο	597-577	503-520
Πράσινο	577-492	520-610
Μπλε	492-455	610-659
Ιώδες	455-390	659-769
	$1nm=10^{-9}m$	$1\ THz=10^{12}Hz$

(Πίν. 4.3.2.3)

σε επτά, όπου το μπλε χρώμα χωρίζεται σε δύο περιοχές (μπλε και σκούρο μπλε). Θα πρέπει ν' αναφέρουμε εδώ ακροθιγώς, ότι η αντίληψη του 'χρώματος' είναι συνέπεια της υποκειμενικής μας αίσθησης, όταν ακτινοβολία ορισμένης συχνότητας προσπέσει στον αμφιβληστροειδή του ματιού μας. 'Ορατές' ακτινοβολίες ('ορατό' φάσμα ακτινοβολιών) είναι αυτή η περιοχή συχνοτήτων – τμήμα του μεγάλου εύρους του Η/Μ φάσματος – στις οποίες αντιδρά το ανθρώπινο μάτι και που τα όριά τους ορίζονται στον (Πίν. 4.3.2.3). Στην (Εικ. 4.3.2.4) φαίνεται μια στοιχειώδης

διάταξη με βάση την οποία μπορούμε να δούμε την ανάλυση μιας προσπίπτουσας δέσμης λευκού φωτός από ένα πρίσμα που η διαθλαστική του γωνία είναι $a = 60^o$.



(Εικ. 4.3.2.4)

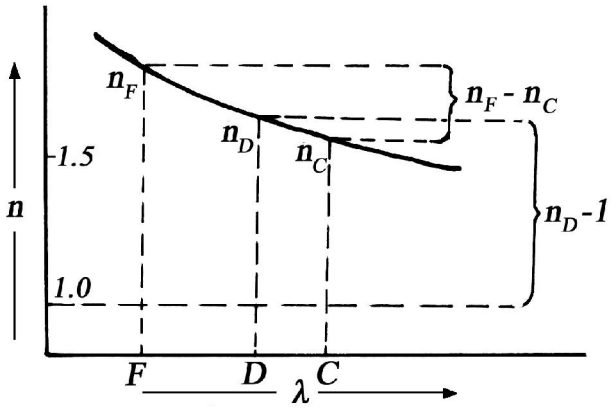
Για να μπορέσουμε να έχουμε ένα μέτρο της απόκλισης των διαφόρων χρωμάτων κατά την ανάλυσή τους μέσω ενός διασπείροντος μέσου, χρησιμοποιούμε την έννοια της ***ισχύος διασκεδασμού (dispersion power)***. Η ισχύς διασκεδασμού ω καθορίζεται με βάση τους δ.δ. που αντιστοιχούν σε τρία εντελώς συγκεκριμένα μ.κ. ακτινοβολιών του ορατού φάσματος. Συμβολίζονται με $\lambda_F, \lambda_D, \lambda_C$ και οι αντίστοιχοι δ.δ. με n_F, n_D, n_C. Δίνεται από τη σχέση:

$$\omega = \frac{n_F - n_C}{n_D - 1} \qquad (4.3.2.1)$$

Τα μ.κ. $\lambda_F = 486.1\text{nm}$ και $\lambda_C = 656.2\text{nm}$ αντιστοιχούν σε γραμμές εκπομπής του H_2 (Υδρογόνου). Το μ.κ. $\lambda_D = 589.2\text{nm}$ αντιστοιχεί στη μέση τιμή των δύο πολύ κοντινών γραμμών εκπομπής των ατμών του Na (Νατρίου). Οι θέσεις των γραμμών αυτών βρίσκονται αντίστοιχα στην μπλε την κόκκινη και την κίτρινη περιοχή του ορατού φάσματος. Στο (Σχ. 4.3.2.5) γίνεται εμφανής ο σχηματισμός των όρων $n_F - n_C$ και $n_D - 1$ για την καμπύλη διασκεδασμού ενός συγκεκριμένου οπτικού μέσου.

Το τι ακριβώς αντιπροσωπεύει η ισχύς διασκεδασμού από φυσική άποψη μπορούμε να το αντιληφθούμε θεωρώντας ότι η ανάλυση του φωτός γίνεται μέσω

ενός λεπτού πρίσματος (Σχ. 4.3.2.1). Αν $\delta_F, \delta_D, \delta_C$ είναι οι γωνίες εκτροπής για τις ακτινοβολίες με μ.κ. $\lambda_F, \lambda_D, \lambda_C$ και αντίστοιχους δ.δ. n_F, n_D, n_C τότε θα έχουμε:



(Σχ. 4.3.2.5)

$$\delta_F = (n_F - 1)a \qquad \delta_D = (n_D - 1)a \qquad \delta_C = (n_C - 1)a \tag{4.3.2.2}$$

όπου a η ανακλαστική γωνία του πρίσματος. Τότε η διαφορά μεταξύ των εκτροπών δ_F, δ_C: $\delta_F - \delta_C = (n_F - n_C)\alpha$ (που ονομάζεται ***μερικός διασκεδασμός (partial dispersion)*** ή ***διασκεδασμός (dispersion)***), προς την εκτροπή δ_D που ουσιαστικά αντιστοιχεί σε μια μέση εκτροπή (Σχ. 4.3.2.1) θα είναι:

$$\frac{\delta_F - \delta_C}{\delta_D} = \frac{(n_F - n_C)a}{(n_D - 1)a} = \frac{n_F - n_C}{n_D - 1} = \omega \tag{4.3.2.3}$$

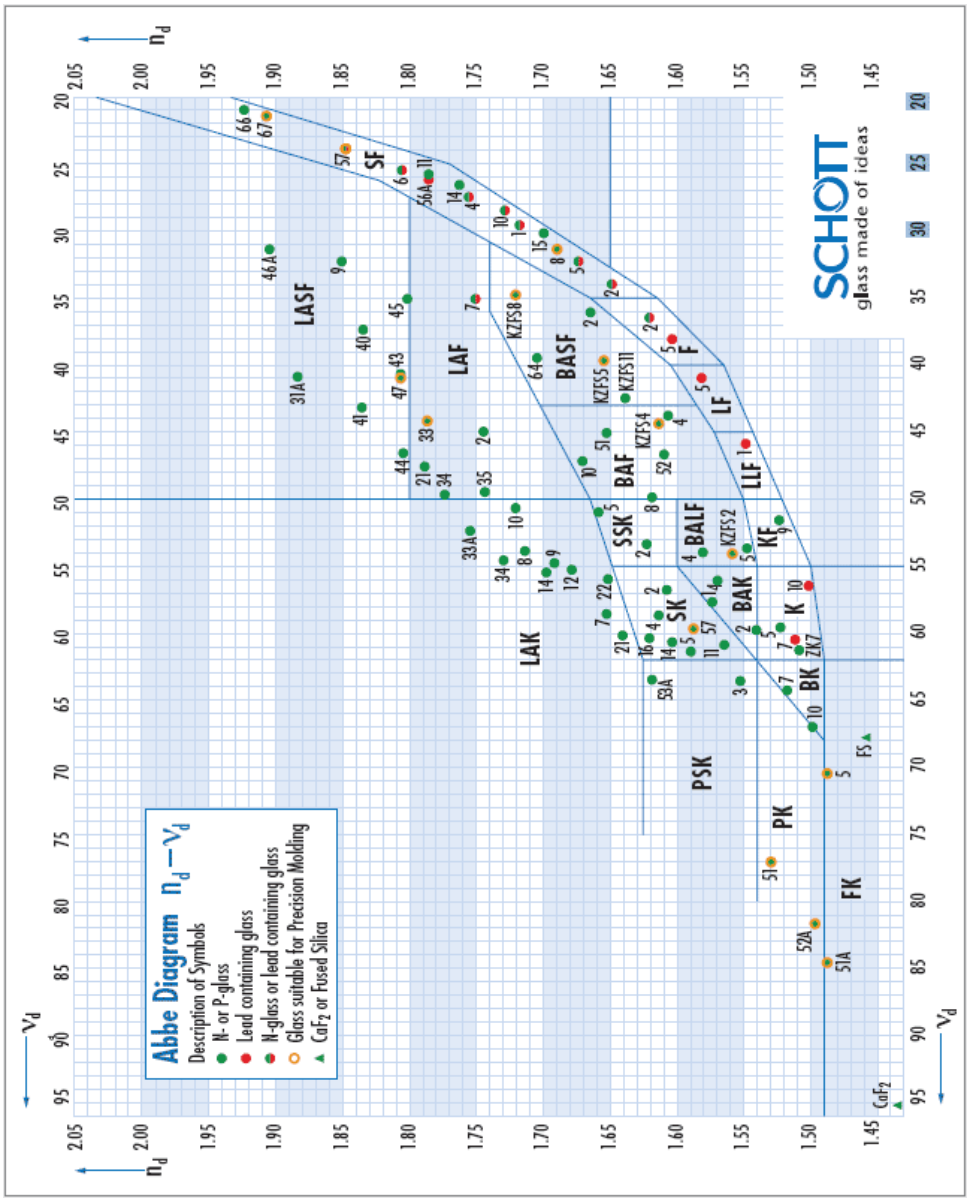
Το αντίστροφο της ισχύος διασκεδασμού ονομάζεται ***αριθμός Abbe(Abbe number)*** και συμβολίζεται σαν V_D. Θα είναι δηλ.

$$V_D = \frac{1}{\omega} = \frac{n_D - 1}{n_F - n_C} \tag{4.3.2.4}$$

και όπως θα δούμε στα επόμενα αποτελεί χαρακτηριστική παράμετρο για κάθε οπτικό μέσο.

Πράγματι γνωρίζουμε σήμερα ότι υπάρχει μεγάλος αριθμός οπτικών υλικών (γυαλιών) με τα οποία κατασκευάζονται τα διάφορα στοιχεία των οπτικών οργάνων όπως φακοί, πρίσματα, πλάκες κλπ καθώς και δεκάδες άλλα εξαρτήματα της οπτικής τεχνολογίας. Ο χαρακτηρισμός αυτών των γυαλιών από οπτική άποψη δεν

μπορεί να γίνει μόνο με το δ.δ. n_D. Ο λόγος είναι ότι πολλά από τα γυαλιά έχουν τον ίδιο δ.δ. Τότε σαν συμπληρωματική παράμετρο χρησιμοποιούμε τον αριθμό



(Πίν. 4.3.2.6)

Abbe. Με τη βοήθεια των παραμέτρων n_D και V_D είναι δυνατόν να γίνει μια απαραγνώριστη κατάταξη των οπτικών γυαλιών.

Στην σύγχρονη οπτική τεχνολογία ο αριθμός Abbe ορίζεται με μεγαλύτερη ακρίβεια από τη σχέση:

$$V_d = \frac{n_d - 1}{n_F - n_C} \qquad (4.3.2.5)$$

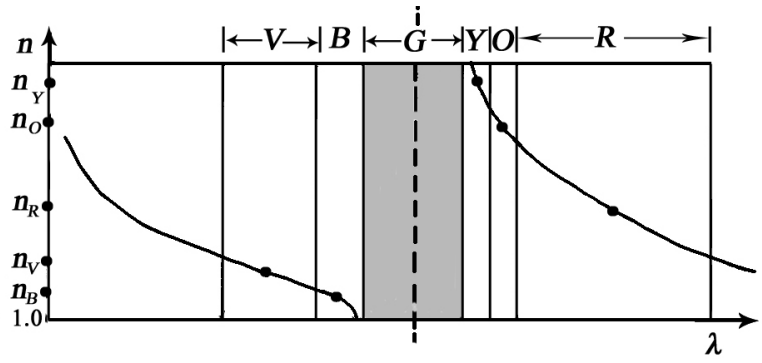
όπου αντικαθιστούμε το δ.δ. n_D από τον n_d. Ο δ.δ. n_d είναι αυτός που υπολογίζεται με ακτινοβολία που αντιστοιχεί στην φασματική γραμμή d ή D_3 της οποίας το μ.κ. είναι $\lambda_d = 587.5618\text{nm}$ και είναι γραμμή εκπομπής του He (Ηλίου). Ανήκει στην κίτρινη περιοχή του ορατού Η/Μ φάσματος και βρίσκεται πολύ κοντά στις δύο φασματικές γραμμές εκπομπής D_1 και D_2 του Na (Νατρίου) των οποίων το μέσο μ.κ. $\lambda = \left(\lambda_{D_1} + \lambda_{D_2}\right)/2 = 589.2\text{nm}$ χρησιμοποιούμε για τον προσδιορισμό του n_D και κατά προέκταση του V_D. Όπως μπορούμε να διαπιστώσουμε συγκρίνοντας τις τιμές των μ.κ. λ_D, λ_d, τα τελευταία διαφέρουν κατ' ελάχιστον. Στον (Πίν. 4.2.3.1) μπορούμε να δούμε τις τιμές των δ.δ. n_d διαφόρων οπτικών υλικών.

Τα οπτικά υλικά (γυαλιά) για τα οποία μιλήσαμε προηγουμένως, ανήκουν στην κατηγορία των στερεών ομογενών ισότροπων υλικών. Στον (Πίν. 4.3.2.6) παρατίθεται ένα μεγάλο πλήθος τέτοιων γυαλιών σε διάγραμμα $\left(n_d - V_d\right)$, που παράγονται από την εταιρεία κατασκευής Schott.

Παράδειγμα

Να γίνει ανάλυση του φωτός δια μέσου ενός κενού πρίσματος από γυαλί με λεπτά τοιχώματα, το οποίο περιέχει διάλυμα Φουσίνης σε Αλκοόλη. Η Φουσίνη είναι μια ισχυρή βαφή (ανιλίνη) η οποία απορροφά έντονα στην πράσινη περιοχή του ορατού φάσματος γι' αυτό το χρώμα της είναι πορφυρό(φούξια) (μπλε – κόκκινο).

- Είναι προφανές – όπως μπορούμε να δούμε από το (Σχ.1) – που παριστάνει το διάγραμμα διασκεδασμού για το συγκεκριμένο πρόβλημα, ότι η πράσινη περιοχή του ορατού φάσματος βρίσκεται σε περιοχή ανώμαλου διασκεδασμού. Αν βέβαια οι



(Σχ. 1)

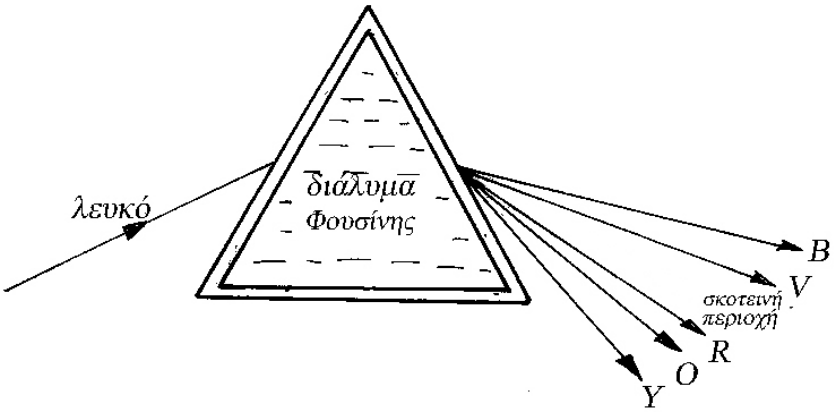
περιοχές των χρωμάτων της ίριδας (της ορατής περιοχής του Η/Μ φάσματος) με κεντρικά τα μ.κ. $\lambda_V < \lambda_B < \lambda_G < \lambda_Y < \lambda_O < \lambda_R$ βρισκόταν σε περιοχή ομαλού διασκε-

δασμού, τότε η διαδοχή των αντίστοιχων δ.δ. θα ήταν κατά τα γνωστά: $n_V > n_B > n_G > n_Y > n_O > n_R$ και οι αντίστοιχες γωνίες εκτροπής κατά την ανάλυση από ένα πρίσμα: $\delta_V > \delta_B > \delta_G > \delta_Y > \delta_O > \delta_R$. Όμως για την περίπτωση της ανάλυσης μέσω του πρίσματος, με το διάλυμα της Φουσινής οι τιμές των δ.δ με τη βοήθεια του (κατά προσέγγιση) διαγράμματος του διασκεδασμού του (Σχ.1) διαμορφώνονται ως εξής:

$$n_Y > n_O > n_R(\text{απορρόφηση}) > n_V > n_B$$

Συνέπεια αυτού του γεγονότος θα είναι ότι κατά την ανάλυση του λευκού φωτός μέσου αυτού του πρίσματος η διαδοχή των γωνιών εκτροπής των διάφορων χρωμάτων είναι η εξής:

$$\delta_Y > \delta_O > \delta_R(\text{σκοτεινή περιοχή}) > \delta_V > \delta_B$$



(Σχ. 2)

Η διαδοχή αυτή φαίνεται στο (Σχ.2). Κατά τα γνωστά (Πίν. 4.3.2.3), τα φασματικά όρια των χρωμάτων της ίριδας για την περιοχή του ορατού, μεταξύ περίπου των 390nm – 780nm είναι:

R:(κόκκινο): $\Delta\lambda_R = 158nm$ O:(πορτοκαλί): $\Delta\lambda_O = 25nm$

Y:(κίτρινο): $\Delta\lambda_Y = 20nm$ G:(πράσινο): $\Delta\lambda_G = 85nm$

B:(μπλε): $\Delta\lambda_B = 37nm$ V:(Ιώδες): $\Delta\lambda_V = 65nm$

4.3.3 *Η εξίσωση του Sellmeier*

Όπως γίνεται φανερό από τα προαναφερόμενα στην (§ 4.3.1), οι τύποι του Cauchy δεν είναι δυνατόν να περιγράψουν το φαινόμενο στην περιοχή του ανώμαλου διασκεδασμού. Αυτό έγινε δυνατό να επιτευχθεί με βάση τις υποθέσεις του

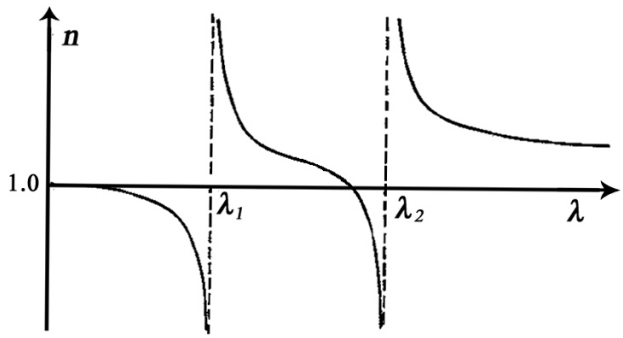
Sellmeier (1871) ότι η ύλη συντίθεται από φορτισμένα σωματίδια που μεταξύ τους συνδέονται με ελαστικής φύσης δυνάμεις. Αν δεν επιδρούν συνεχώς εξωτερικές δυνάμεις, τότε τα σωματίδια θα μπορούσαν μετά από μια στιγμιαία διαταραχή να ταλαντεύονται με μια ορισμένη συχνότητα ν_0 (φυσική συχνότητα ταλάντωσης). Αν όμως η επίδραση είναι περιοδική (π.χ. δυνάμεις από τη δράση του αρμονικού ηλεκτρικού πεδίου του προσπίπτοντος φωτός συχνότητας ν), τότε τα σωματίδια πάλλονται με εξαναγκασμένο τρόπο. Το γεγονός αυτό επηρεάζει την ταχύτητα υ διάδοσης του φωτός στο μέσο, άρα και το δ.δ. $n = c/\upsilon$. Οι υπολογισμοί του Sellmeier οδήγησαν σε μια εξίσωση διασκεδασμού της μορφής:

$$n^2 = 1 + \frac{S\lambda^2}{\lambda^2 - \lambda_0^2} \qquad (4.3.3.1)$$

όπου S, λ_0 είναι δύο σταθερές που υπολογίζονται όπως και για την περίπτωση του τύπου του Cauchy με τη βοήθεια πειραματικών μετρήσεων του δ.δ. για δύο διαφορετικά μήκη κύματος λ. Το λ_0 είναι ουσιαστικά το μ.κ. στο κενό που αντιστοιχεί στη συχνότητα συντονισμού ν_0. Αν το υλικό παρουσιάζει συντονισμό για περισσότερες από μία συχνότητες, τότε η (σχ. 4.3.3.1) παίρνει τη μορφή:

$$n^2 = 1 + \sum_{i=1}^{N} \frac{S_i \lambda^2}{\lambda^2 - \lambda_i^2} \qquad (4.3.3.2)$$

όπου $\lambda_i,\ i = 1, 2, \cdots, N$ είναι τα μ.κ. που αντιστοιχούν στις συχνότητες συντονισμού ν_i. Η γραφική παράσταση της (σχ. 4.3.3.2) για $N = 2$ δίνεται στο (Σχ. 4.3.3.1).



(Σχ. 4.3.3.1)

Η εξίσωση του Sellmeier είναι περισσότερο αξιόπιστη σε σχέση με τον τύπο του Cauchy επειδή: α) περιγράφει την περιοχή του ανώμαλου διασκεδασμού και β)

δίνει μεγαλύτερη ακρίβεια στον υπολογισμό του δ.δ. n για την περιοχή του ομαλού διασκεδασμού σε σχέση με αυτή του Cauchy με τον ίδιο αριθμό σταθερών. Αποδεικνύεται ότι ο τύπος του Cauchy είναι μια προσέγγιση της εξίσωσης του Sellmeier (βλ. Άσκ. 3). Μπορούμε να δούμε επίσης ότι η (σχ. 4.3.3.6) είναι ακριβώς ίδια με αυτήν που παράγεται με βάση την Η/Μ θεωρία και τις μικροσκοπικές υποθέσεις της ατομικής θεωρίας (§ 4.1.2, (σχ. 4.1.2.10)). Η εξίσωση του Sellmeier χρησιμοποιείται πολύ συχνά για τον ακριβή προσδιορισμό της συναρτησιακής εξάρτησης του δ.δ. n από το μ.κ. λ με βάση πειραματικά δεδομένα, όπως θα δούμε στο επόμενο παράδειγμα.

Παράδειγμα

Γνωρίζουμε ότι η μέτρηση του δ.δ ενός υλικού για ένα ορισμένο μ.κ. μπορεί να γίνει στηριζόμενοι στο φαινόμενο της διάθλασης του φωτός με τη μέθοδο της φαινομένης ανύψωσης (βλ. Κεφ. 3: Γεωμετρική Οπτική § 3.3.2). Θέλουμε να προσδιορίσουμε τη συνάρτηση διασκεδασμού για τον κρύσταλλο $\mathrm{BGO}\left(\mathrm{Bi_{12}GeO_{20}}\right)$ που ανήκει στο κυβικό σύστημα για την περιοχή των μ.κ. από $500-700\mathrm{nm}$. Για το

λ	n_1	n_2	n_3	<n>	1/λ^2	1/(n^2-1)	σ_m
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)
500	2.647948	2.646717	2.647333	2.647333	0.000004	0.166434	0.000503
510	2.635073	2.633582	2.629998	2.632884	3.84E-06	0.168575	0.00213
520	2.620711	2.61509	2.61656	2.617454	3.7E-06	0.170909	0.00238
530	2.604251	2.602002	2.603457	2.603237	3.56E-06	0.173105	0.000931
540	2.600879	2.600681	2.599492	2.600351	3.43E-06	0.173556	0.000612
550	2.597251	2.596856	2.592386	2.595498	3.31E-06	0.174319	0.002206
560	2.591206	2.58983	2.589306	2.590114	3.19E-06	0.175172	0.000801
570	2.583167	2.580369	2.583754	2.58243	3.08E-06	0.1764	0.001477
580	2.574596	2.570203	2.574272	2.573024	2.97E-06	0.177922	0.001999
590	2.568849	2.572139	2.570396	2.570461	2.87E-06	0.17834	0.001344
600	2.56814	2.56409	2.566338	2.566189	2.78E-06	0.179041	0.001657
610	2.559732	2.559092	2.559732	2.559519	2.69E-06	0.180143	0.000302
620	2.555134	2.552841	2.554624	2.5542	2.6E-06	0.18103	0.000983
630	2.546938	2.552651	2.549347	2.549645	2.52E-06	0.181795	0.002342
640	2.542322	2.540872	2.541944	2.541713	2.44E-06	0.18314	0.000614
650	2.540053	2.536404	2.539486	2.538647	2.37E-06	0.183664	0.001603
660	2.536467	2.53609	2.537032	2.53653	2.3E-06	0.184027	0.000387
670	2.532641	2.53239	2.530513	2.531848	2.23E-06	0.184834	0.000949
680	2.526518	2.524774	2.522163	2.524485	2.16E-06	0.186115	0.00179
690	2.520797	2.519433	2.518999	2.519743	2.1E-06	0.186947	0.000766
700	2.517823	2.512141	2.512141	2.514035	2.04E-06	0.187957	0.002678

(Πίν. 1)

λόγο αυτό χρησιμοποιούμε ένα πλακίδιο του προαναφερόμενου υλικού με παράλληλες έδρες ορισμένου πάχους. Εκτελούμε τρεις σειρές μετρήσεων και προσδιορί-

ζουμε (μέσω της μέτρησης της εκάστοτε φαινομένης ανύψωσης) τις τιμές των δ.δ. που φαίνονται στις στήλες 2,3, και 4 του (Πίν. 1).

Υποθέτουμε ότι βρισκόμαστε σε περιοχή ομαλού διασκεδασμού και ότι η αντίστοιχη καμπύλη του μπορεί με καλή προσέγγιση να περιγραφεί από την εξίσωση Sellmeier (σχ. 4.3.3.1):

$$n^2 = 1 + \frac{S\lambda^2}{\lambda^2 - \lambda_0^2} = 1 + S \Big/ \left(1 - \frac{\lambda_0^2}{\lambda^2}\right) \tag{1}$$

όπου κατά τα γνωστά S, λ_0 είναι σταθερές που μπορούν να υπολογισθούν από τα προαναφερόμενα πειραματικά δεδομένα. Με τη μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων να προσδιοριστεί η καμπύλη του διασκεδασμού και να βρεθούν οι αποκλίσεις από τη μέση τιμή των μετρούμενων δ.δ. για τα αντίστοιχα μ.κ.

- Για τον προσδιορισμό των σταθερών S, λ_0 γραμμικοποιούμε την εξίσωση (1) που τελικά παίρνει τη μορφή:

$$\frac{1}{n^2 - 1} = \frac{1}{S} - \frac{\lambda_0^2}{S} \cdot \frac{1}{\lambda^2} \tag{2}$$

ή $y = a + \beta x$ όπου $x = 1/\lambda^2$, $y = 1/\left(n^2 - 1\right)$, $a = 1/S$ και $\beta = -\lambda_0^2/S$.Όπότε οι σταθερές S, λ_0 θα δίνονται από τις σχέσεις:

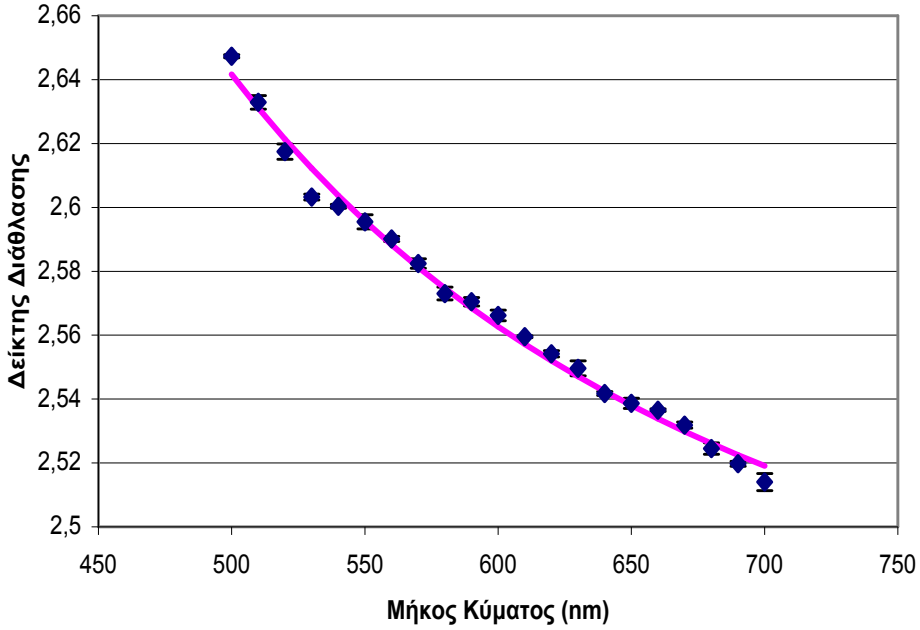
$$S = 1/a \quad \text{και} \quad \lambda_0 = \sqrt{\beta/\alpha} \tag{3}$$

Ο προσδιορισμός της κλίσης β (SLOPE) και της τεταγμένης α (INTERCEPT) που η ευθεία των ελαχίστων τετραγώνων τέμνει τον άξονα των $1/\left(n^2 - 1\right)$, δίνονται από το πρόγραμμα EXCEL σε Η/Υ. Υπολογίζουμε: α) την $\langle n \rangle$ (στήλη 5) $1/\lambda^2$ (στήλη 6), $1/\left(n^2 - 1\right)$ (στήλη 7) με τη βοήθεια των τιμών των λ (στήλη 1) και των n_1, n_2, n_3 (στήλες 2,3,4) του (Πίν. 1). Μετά την εφαρμογή βρίσκουμε: $a = 0.207685$ και $\beta = 10103.947$. Κατ' ακολουθία:

$$S = 4.81498 \qquad \lambda_0 = 220.5679\text{nm}$$

Στη γραφική παράσταση του (Σχ. 2) τα διακριτά πειραματικά σημεία αντιστοιχούν στη μέση τιμή $\langle n \rangle$ των n_1, n_2, n_3 (στήλες 2,3,4). Στο καθένα επισυνάπτεται η απόκλιση από τη μέση τιμή με βάση τον γνωστό τύπο:

$$\sigma_n = \sqrt{\left\langle \left(n - \langle n \rangle \right)^2 \right\rangle} \tag{4}$$



(Σχ. 2)

για τις τρεις σειρές μετρήσεων του δείκτη διάθλασης.

Εφόσον λοιπόν είναι γνωστές οι αριθμητικές τιμές του ζεύγους των σταθερών S, λ_0, τότε η (σχ. 4.3.3.1) μπορεί να γραφεί ως εξής:

$$n^2 = 1 + \frac{4.81498\lambda^2}{\lambda^2 - (220.5679)^2} \tag{5}$$

Δηλ. είμαστε πλέον σε θέση να γνωρίζουμε την τιμή του δ.δ. n για οποιοδήποτε μ.κ. λ που ανήκει στη φασματική περιοχή $(500 - 700\text{nm})$. Παρατηρούμε επίσης ότι ο κρύσταλλος του $\text{BGO}(\text{Bi}_{12}\text{GeO}_{20})$, εμφανίζει υψηλό δ.δ $(n \simeq 2.5)$ σε όλη την ορατή περιοχή του Η/Μ φάσματος.

4.4 *Ανάλυση του φωτός με τη βοήθεια οργάνων*

Ανάλυση εννοούμε τη διάκριση των επί μέρους συνιστωσών, όσον αφορά τις εντάσεις και τα μήκη κύματος μιας συγκεκριμένης πολυχρωματικής ακτινοβολίας. Πρόκειται δηλ. για την παρατήρηση ή καταγραφή των λεγόμενων ***φασμάτων*** των ακτινοβολιών. Η ανάλυση και η μελέτη των εκπεμπόμενων ή σκεδανύμενων ακτινοβολιών από την ύλη στις διάφορες περιοχές του Η/Μ φάσματος είναι αντι-

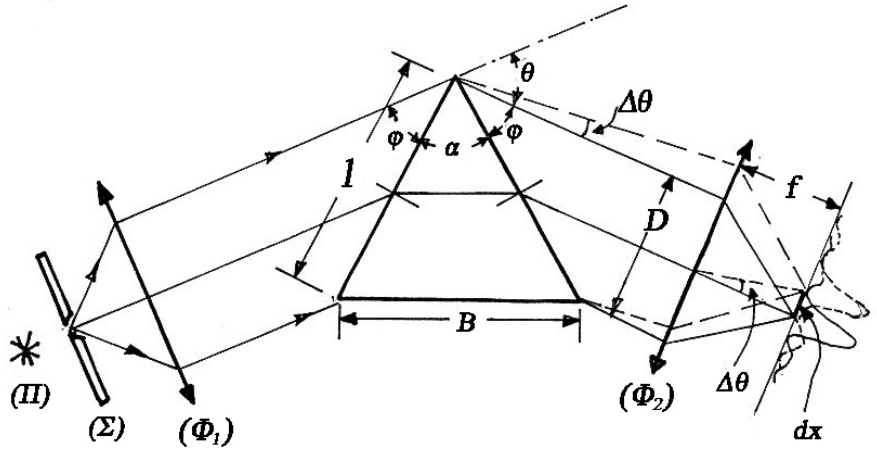
κείμενο του κλάδου της ***Φασματοσκοπίας***. Ανάλογα με την συγκεκριμένη περιοχή, μιλούμε για φασματοσκοπία υπεριώδους (UV), ορατού (VIS), υπέρυθρου (IR) κ.λ.π. Στην προκειμένη περίπτωση μας ενδιαφέρει η ανάλυση της περιοχής ακτινοβολιών του ορατού τμήματος του Η/Μ φάσματος. Όργανα τα οποία εκτελούν τέτοιου είδους διεργασίες έχουν κατασκευαστεί σε μεγάλο αριθμό, από τον προηγούμενο αιώνα μέχρι σήμερα και δεν μπορούν, να περιγραφούν παρά οι γενικές αρχές λειτουργίας ορισμένων από αυτά. Η έμφαση που δίνεται σήμερα κατασκευαστικά, είναι κυρίως στη βελτίωση των αναλυτικών τους στοιχείων (πρισμάτων, φραγμάτων, συμβολομετρικών πλακών κ.λ.π) καθώς και στην αυτοματοποίηση τους. Σαν αυτοματοποίηση, εννοούμε ότι η ανάλυση των ακτινοβολιών και η παράθεση των φασμάτων γίνεται σε πραγματικό χρόνο για την περίπτωση π.χ. που η φασματική κατανομή της εκπεμπόμενης ακτινοβολίας από μία πηγή μεταβάλλεται χρονικά. Το κλασσικό όργανο το οποίο μας ενδιαφέρει εδώ και στοιχειωδώς θα περιγράψουμε, είναι το ***φασματοσκόπιο πρίσματος***, το οποίο ανήκει στη χωρία των προαναφερόμενων οργάνων. Με την βοήθειά του (εκτός της ανάλυσης και της παρατήρησης φασμάτων του φωτός που εκπέμπεται από διάφορες πηγές), είναι δυνατόν να κάνουμε μετρήσεις δ.δ. σε συνάρτηση με το μ.κ. δηλαδή να προσδιορίσουμε την καμπύλη διασκεδασμού του συγκεκριμένου υλικού από το οποίο αποτελείται το πρίσμα. Πράγματι επειδή το οπτικό σύστημα του φασματοσκόπιου εδράζεται πάντοτε σ' ένα μεγάλης ακρίβειας γωνιόμετρο με βάση το οποίο μπορεί να γίνει ακριβής μέτρηση γωνιών, είναι δυνατόν να προσδιοριστούν πειραματικά: α) Η διαθλαστική γωνία του πρίσματος και β) η γωνία ελάχιστης εκτροπής για ένα συγκεκριμένο μ.κ. Κατά προέκταση βέβαια να γίνει ο προσδιορισμός του δ.δ. του υλικού.

Άλλα κλασσικά φασματοσκοπικά όργανα είναι: α) Ο ***Μονοχρωμάτορας***. Πρόκειται για ένα όργανο στου οποίου την είσοδο προσπίπτει συνεχής ακτινοβολία (λευκό φως) (π.χ. από μια πηγή αλογόνου), και στην έξοδό του μπορούμε να πάρουμε βήμα προς βήμα πολύ στενές περιοχές του φάσματος, δηλ. μονοχρωματικό φως που αντιστοιχεί κάθε φορά σε ένα εύρος ζώνης $\Delta\lambda$ και σε ένα κεντρικό μ.κ. λ. Βασικά στοιχεία μέσω των οποίων επιτυγχάνεται η ανάλυση της πολυχρωματικής ακτινοβολίας είναι αντίστοιχα τα πρίσματα, τα φράγματα και οι συμβολομετρικές πλάκες. Η ανάλυση επιτυγχάνεται με τη βοήθεια των φαινομένων του διασκεδασμού, της περίθλασης και τις συμβολής του φωτός αντίστοιχα. β) Ο ***φασματογράφος*** δεν διαφέρει ουσιαστικά από τον μονοχρωμάτορα. Όμως στην έξοδό του παρατίθεται ταυτόχρονα όλο το αναλυμένο φάσμα της προσπίπτουσας ακτινοβολίας. Π.χ. αν η είσοδος του φωτίζεται από μια φασματική λυχνία Hg τότε στην έξοδό του (π.χ. σ' ένα film ή σε μια CCD camera), θα καταγραφούν ταυτόχρονα όλες οι φασματικές της γραμμές. Αν επίσης η είσοδος του φωτιστεί από πηγή λευκού φωτός, τότε στην έξοδο του θα έχουμε όλο το φάσμα της συνεχούς κατανομής. Στα επόμε-

να θα χρησιμοποιήσουμε σαν αναλυτικό στοιχείο το πρίσμα όπου η ανάλυση δια μέσου του κατά τα γνωστά βασίζεται στη θεωρία του διασκεδασμού του φωτός. Της περιγραφής του φασματοσκόπιου, θα προταθεί μια παράγραφος που θ' αφορά τη διακριτική ικανότητα των πρισμάτων.

4.4.1 *Διακριτική ικανότητα πρίσματος*

Στο (Σχ. 4.4.1.1) φαίνονται σε τομή τα στοιχεία μέσω των οποίων γίνεται η ανάλυση του φωτός σ' ένα φασματοσκόπιο πρίσματος. Η πηγή (*Π*) της οποίας θέλουμε να πάρουμε το φάσμα, φωτίζει μια σχισμή (*Σ*) (κάθετη στο σχήμα) που με τη σειρά της αποτελεί γραμμική πηγή φωτός, εκπέμποντας ένα αποκλίνον κυλινδρικό μέτωπο κύματος. Αν η πηγή τοποθετηθεί στο μπρος εστιακό επίπεδο του παραλληλιστή φακού (Φ_1) το φως που βγαίνει απ' αυτόν θα είναι ένα επίπεδο μέτωπο



(Σχ. 4.4.1.1)

κύματος. Το μέτωπο αυτό φωτίζει τη μια πλευρά του πρίσματος και διαθλώμενο δύο φορές, αναδύεται με μια γωνία εκτροπής θ. Η γωνία αυτή κατά τα γνωστά σχηματίζεται από τη διεύθυνση της προσπίπτουσας και αυτή της διαθλώμενης στη δεύτερη πλευρά του πρίσματος. Το αναδυόμενο μέτωπο κύματος, μέσω του φακού (Φ_2) (του αντικειμενικού φακού ενός τηλεσκοπίου), εστιάζεται στο πίσω εστιακό του επίπεδο. Επειδή όμως το συγκεκριμένο μέτωπο κύματος υπόκειται στους περιορισμούς των ορίων του πρίσματος και ειδικότερα από το ενεργό του πλάτος D (Σχ. 4.4.1.1), θα υφίσταται περίθλαση (βλ. Κεφ. 7: Περίθλαση του φωτός). Άρα στο εστιακό επίπεδο του φακού (Φ_2) δεν θα σχηματιστεί το γεωμετρικό είδωλο της σχισμής (*Σ*) αλλά μια κατανομή έντασης που αντιστοιχεί στο πρότυπο περίθλασης μέσω του ενεργού πλάτους D της δεύτερης επιφάνειας του πρίσματος. Το αποτέλε-

σμα αυτό κατά τα γνωστά, βάζει περιορισμούς όσον αφορά τη σαφή διάκριση δύο φασματικών γραμμών (βλ. § 4.4.2) που τυχόν να βρίσκονται πολύ κοντά μεταξύ τους. Προϋποθέτουμε για την περίπτωση αυτή το κριτήριο του Rayleigh με βάση το οποίο δύο κατανομές είναι διακριτές σαφώς, όταν το μέγιστο της μιας συμπίπτει με το πρώτο ελάχιστο της άλλης.

Έστω λοιπόν ότι από τη σχισμή (Σ) διαδίδεται σύνθετη ακτινοβολία που περιλαμβάνει δύο μ.κ. λ και $\lambda+\Delta\lambda$. Αυτό θα έχει σαν αποτέλεσμα λόγω της ανάλυσης από το πρίσμα να αναδυθούν δύο επί μέρους επίπεδα μέτωπα κύματος σε γωνίες εκτροπής θ και $\theta+\Delta\theta$. Τότε εφόσον δεχθούμε ότι ισχύει το κριτήριο του Rayleight, με τη βοήθεια των πορισμάτων της θεωρίας της περίθλασης από σχισμή , το γωνιακό άνοιγμα μεταξύ μεγίστου και ελαχίστου της κατανομής της έντασης του φωτός θα δίνεται από τη σχέση $\Delta\theta=\lambda/D$.

Γωνιακός διασκεδασμός $d\theta/d\lambda$

Ονομάζουμε ***γωνιακό διασκεδασμό (angular dispersion)*** πρίσματος το γωνιακό διαχωρισμό $d\theta$ που επιτυγχάνεται για δύο φασματικές γραμμές δύο διακεκριμένων μ.κ. που απέχουν μεταξύ τους κατά $d\lambda$. Ο γωνιακός διασκεδασμός αναφέρεται για συνθήκες ***ελάχιστης εκτροπής (minimum deviation)*** του πρίσματος, όπου προσπίπτουσες και αναδυόμενες ακτίνες σχηματίζουν τη ίδια γωνία, με συνέπεια στο εσωτερικό του να διαδίδονται παράλληλα με τη βάση του (βλ. Κεφ. 3: Γεωμ. Οπτική, ΠΑΡ/ΜΑ 1). Η γωνία ελάχιστης εκτροπής δίνεται από τη σχέση:

$$n=\sin\frac{a+\theta}{2}\Big/\sin\frac{a}{2} \quad \text{οπότε:} \quad \frac{1}{2}\cos\frac{a+\theta}{2}\frac{d\theta}{d\lambda}=\sin\frac{a}{2}\frac{dn}{d\lambda} \qquad (4.4.1.1)$$

όπου n ο δ.δ. του πρίσματος, a η διαθλαστική του γωνία και θ η γωνία ελάχιστης εκτροπής. Αν υποθέσουμε ότι l είναι η πλευρά του πρίσματος και B η βάση του τότε από το (Σχ. 4.4.1.1) θα έχουμε:

$$\left.\begin{array}{l} \sin\phi=D/l,\ \ 2\phi+\alpha+\theta=\pi \quad \text{άρα} \quad \phi=\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\alpha+\theta}{2} \quad \text{και} \\[2ex] \sin\phi=\cos(a+\theta)/2 \quad \text{οπότε} \quad \cos(a+\theta)/2=D/l \quad \text{και} \quad 2\sin\dfrac{a}{2}=B/l \end{array}\right\} \qquad (4.4.1.2)$$

Τις (σχ. 4.4.1.2) τις αντικαθιστούμε στη (σχ. 4.4.1.1) οπότε βρίσκουμε:

$$\frac{d\theta}{d\lambda}=\frac{B}{D}\frac{dn}{d\lambda} \qquad (4.4.1.3)$$

όπου $dn/d\lambda$ ονομάζεται ***διασκεδασμός*** του πρίσματος και αποτελεί μια χαρακτηριστική ιδιότητα του υλικού από το οποίο είναι κατασκευασμένο.

Γραμμικός διασκεδασμός dλ/d x

Είναι ο λόγος του διαχωριζόμενου εύρους $\Delta\lambda$ ανά μονάδα μήκους Δx στο επίπεδο εξόδου του φασματοσκοπίου (εδώ στο πίσω εστιακό επίπεδο του φακού (Φ_2)). Πρόκειται για το αντίστροφο του γινομένου του γωνιακού διασκεδασμού και της ενεργού εστιακής απόστασης του φακού. Πράγματι:
$1\Big/\left(\frac{d\theta}{d\lambda}f\right)=1\Big/\frac{f(d\theta)}{d\lambda}=1/(dx/d\lambda)=d\lambda/dx$ επειδή $f(d\theta)\simeq dx$ και το dx μετρείται στο εστιακό επίπεδο του φακού. Με βάση τον ορισμό και τη (σχ. 4.4.1.3) βρίσκουμε:

$$\frac{d\lambda}{dx}=\frac{D}{Bf(dn/d\lambda)} \qquad (4.4.1.4)$$

Διακριτική ικανότητα (ή ισχύς) πρίσματος (λ / Δλ)

Από τη (σχ. 4.4.1.3): $\Delta\theta/\Delta\lambda=(B/D)\big/(dn/d\lambda)$, όπου $\Delta\theta$ το γωνιακό άνοιγμα μεταξύ των μέγιστων δύο γραμμών (ίσης έντασης). Αλλά κατά τα γνωστά $\Delta\theta=\lambda/D$ οπότε: $\frac{\Delta\theta}{\Delta\lambda}=\frac{1}{\Delta\lambda}\frac{\lambda}{D}=\frac{B}{D}\frac{dn}{d\lambda} \Rightarrow \frac{\lambda}{\Delta\lambda}=B\cdot\frac{dn}{d\lambda} \Rightarrow$

$$\Delta\lambda=\frac{\lambda}{B(dn/d\lambda)} \qquad (4.4.1.5)$$

Δηλαδή η μικρότερη διαφορά μ.κ. $\Delta\lambda$ η οποία μπορεί να διακριθεί είναι αντιστρόφως ανάλογη με το γινόμενο του μήκους της βάσης του πρίσματος επί τον διασκεδασμό του. Αυτό με την προϋπόθεση ότι οι δέσμες του αναλυόμενου φωτός θα περιθλώνται από το ενεργό όριο του πρίσματος και όχι από τους φακούς ή άλλα οπτικά στοιχεία. Στην προκειμένη περίπτωση η διάμετρος του φακού (Φ_2) θα πρέπει να είναι μεγαλύτερη από το D. Η ***διακριτική ικανότητα(Resolving power)*** του πρίσματος ορίζεται από τη σχέση:

$$\mathcal{R} = \frac{\lambda}{\Delta\lambda} = B\left(\frac{dn}{d\lambda}\right) \qquad (4.4.1.6)$$

Είναι αδιάστατο μέγεθος και εκφράζει την ικανότητα του πρίσματος να διαχωρίσει δύο διπλανές φασματικές γραμμές που το κεντρικό τους μ.κ. είναι λ και διαφέρουν κατά $\Delta\lambda$. Η μικρότερη διαφορά μ.κ. $\Delta\lambda$ η οποία μπορεί να διακριθεί (διακριτικό όριο $\Delta\lambda_{\min}$) δεν πρέπει να συγχέεται με την έννοια ***εύρος ζώνης*** $\Delta\lambda$ ***(bandpass)*** ενός αναλυτικού οργάνου (π.χ. ενός μονοχρωμάτορα), το οποίο εξαρτάται εκτός των άλλων παραγόντων από το πλάτος της σχισμής εξόδου και εισόδου του συστήματος, το πλάτος του φράγματος ή την ενεργό διατομή του πρίσματος, τα οπτικά σφάλματα και τη ***χωρική διακριτική ικανότητα (spatial resolution)*** του ανιχνευτή.

Παράδειγμα

Η κίτρινη γραμμή εκπομπής D της φασματικής λυχνίας του Na κατά τα γνωστά αποτελείται από δύο γραμμές D_1 και D_2 πολύ κοντά μεταξύ τους με μ.κ. $\lambda_{D_1} = 589.593$ nm και $\lambda_{D_2} = 588.996$ nm. Ποιο θα πρέπει να είναι το μήκος της βάσης του πρίσματος προκειμένου οι προαναφερόμενες γραμμές μόλις να διακρίνονται; Δίνεται ότι ο διασκεδασμός $dn/d\lambda$ στην περιοχή των γραμμών είναι 5.3×10^{-3} / mm.

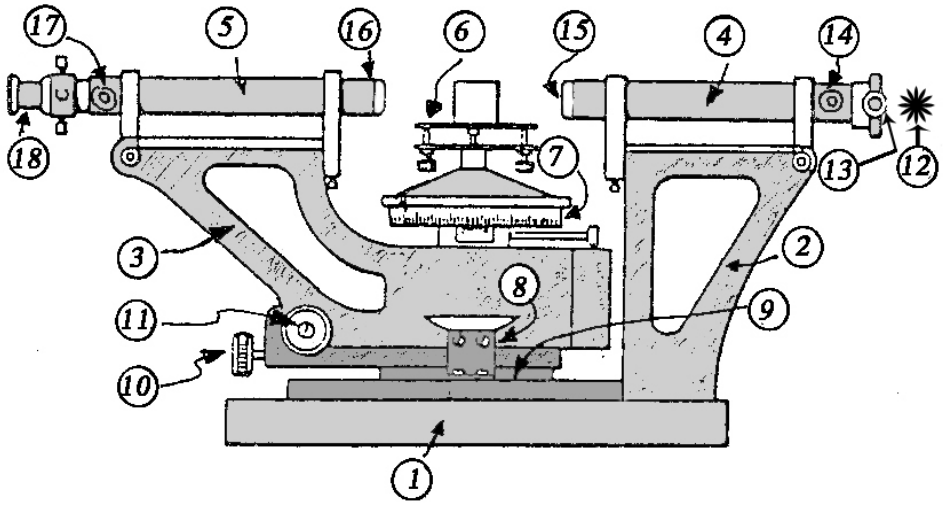
- Από τη σχέση: $\dfrac{\lambda}{d\lambda} = B\left(\dfrac{dn}{d\lambda}\right) \Rightarrow B = \dfrac{\lambda}{d\lambda}\dfrac{1}{\left(dn/d\lambda\right)}$.

Επειδή $\bar{\lambda} = \left(\lambda_{D_1} + \lambda_{D_2}\right)/2 = 589,29$ nm και $\Delta\lambda = \lambda_{D_1} - \lambda_{D_2} = 0,597$ nm θα έχουμε $B \simeq 1,86$ cm.

4.4.2 *Φασματοσκόπιο πρίσματος*

Στο (Σχ. 4.4.2.1) βλέπουμε το σκαρίφημα ενός τέτοιου οργάνου. Αποτελείται από μία βάση (1), πάνω στην οποία είναι τοποθετημένοι οι δύο κλάδοι του. Πάνω στο σταθερό κλάδο (2) είναι τοποθετημένος ο κατευθυντήρας (4). Ο άλλος κλάδος (3), περιστρέφεται γύρω από κατακόρυφο άξονα που περνάει από το κέντρο του οργάνου και πάνω του στηρίζεται ένα τηλεσκόπιο (5). Στον κατακόρυφο άξονα και κάθετα σ' αυτόν υπάρχει βαθμολογημένος κυκλικός δίσκος (7) πάνω στον οποίο βρίσκεται τράπεζα (6), της οποίας η οριζοντιότητα μπορεί να ρυθμιστεί με τρεις κοχλίες. Πάνω της σταθεροποιείται το πρίσμα. Δίσκος και τράπεζα μπορούν να περιστραφούν γύρω από τον κατακόρυφο άξονα του οργάνου ανεξάρτητα από τον κινητό κλάδο (3). Η θέση του κινητού κλάδου (3) (που μεταφέρει το τηλεσκόπιο) καθορίζεται με την βοήθεια δύο βερνιέρων (8) σε αντίθετη ακριβώς θέση, που

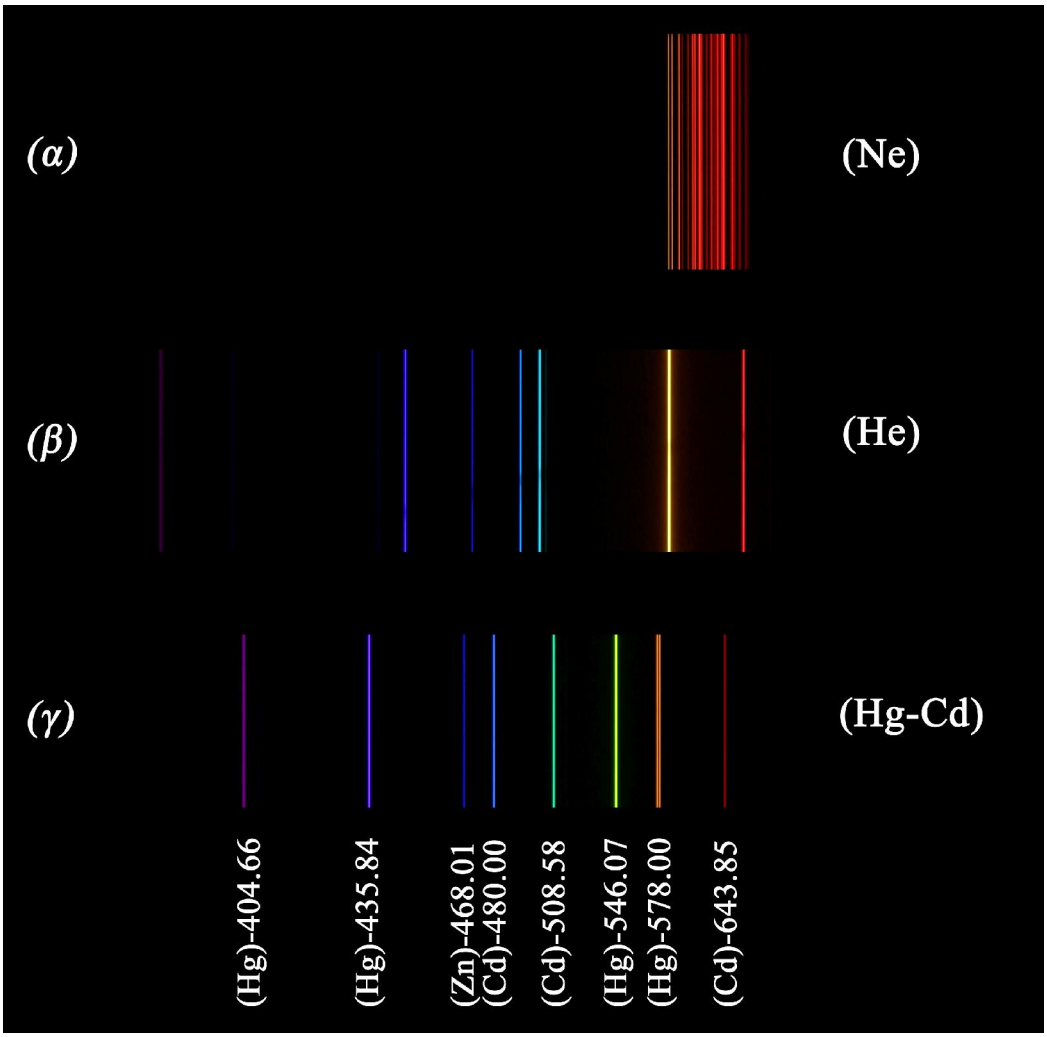
βρίσκονται σε επαφή με την κλίμακα που είναι χαραγμένη στη βάση του οργάνου (9). Από τους κοχλίες (10) και (11) ο πρώτος σταθεροποιεί σε μια θέση τον κινητό βραχίονα και ο δεύτερος (περιστρεφόμενος) τον κινεί μικροσκοπικά περί τον κατακόρυφο άξονα. Η λειτουργία αυτή είναι αναγκαία για μετρήσεις γωνιών με μεγάλη ακρίβεια. Ο κατευθυντήρας (4) αποτελείται από τα εξής στοιχεία: Την μεταβλητού πλάτους σχισμή (13), η οποία είναι τοποθετημένη στο ένα άκρο του και είναι δυ-



(Σχ. 4.4.2.1)

νατόν με κατάλληλο κοχλία (14) να κινηθεί μπρος – πίσω. Τον παραλληλιστή φακό (15) στο άλλο άκρο του. Το όλο σύστημα χρησιμοποιείται για να παράγει μια παράλληλη δέσμη φωτός με την οποία θα φωτιστεί το πρίσμα ή το φράγμα. Για το λόγο αυτό η πηγή (12) της οποίας θέλουμε να εξετάσουμε το φάσμα, τοποθετείται είτε σε επαφή με την σχισμή (13) ή το φως της με τη βοήθεια συμπυκνωτή φακού εστιάζει στην ίδια θέση. Η μπρος – πίσω κίνηση της σχισμής μας βοηθά προκειμένου να την τοποθετήσουμε ακριβώς στο πίσω εστιακό επίπεδο του φακού (15), για να πετύχουμε τον παραλληλισμό της δέσμης. Το τηλεσκόπιο (5) αποτελείται από τον αντικειμενικό φακό (16) και τον προσοφθάλμιο (18), ο οποίος διαθέτει σταυρόνημα στη θέση εστίασής του αντικειμενικού φακού. Η θέση αυτή βρίσκεται μέσω της μπρος – πίσω κίνησης του προσοφθαλμίου με τη βοήθεια του κοχλία (17). Ο ίδιος ο προσοφθάλμιος διαθέτει μπρος – πίσω κίνηση σαν όλο των φακών του προκειμένου το κάθε μάτι να εστιάζει στο σταυρόνημα ανεξάρτητα των σφαλμάτων του. Η λειτουργία του προσοφθαλμίου κατά τα γνωστά είναι να μεγεθύνει το φάσμα το οποίο έχει απεικονιστεί στο πίσω εστιακό επίπεδο του αντικειμενικού φακού μετά την ανάλυσή του από το πρίσμα ή το φράγμα. Με την περιστροφή του κλάδου (3) είναι δυνατόν μέσω του τηλεσκοπίου να παρατηρήσουμε κάθε φορά το επιθυμητό τμήμα του φάσματος της πηγής.

Στην (Εικ. 4.4.2.2) μπορούμε να δούμε τα φάσματα τα οποία λαμβάνονται μέσω ενός φασματοσκοπίου πρίσματος. Πρόκειται για την ανάλυση του φωτός που



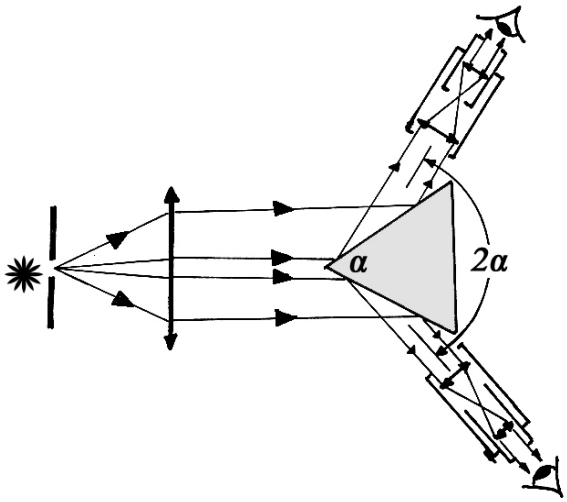
(Εικ. 4.4.2.2)

προέρχεται από τις εξής φασματικές λυχνίες: α) Ne (Νέου) , β) He (Ηλίου) και γ) Hg-Cd (Υδραργύρου –Καδμίου). Τα συγκεκριμένα φάσματα είναι γραμμικά επειδή τα στοιχεία Ne, He είναι αέρια και το μίγμα του υγρού Hg και του στερεού Cd κατά τη λειτουργία της λυχνίας βρίσκονται σε μορφή ατμών. Για τη λυχνία Hg-Cd δίνονται τα μ.κ. των αντίστοιχων φασματικών γραμμών καθώς και τα στοιχεία από τα οποία προέρχονται. Η κίτρινη φασματική γραμμή του Hg ($\bar{\lambda} \simeq 578.00\text{nm}$) είναι διπλή με μ.κ. $\lambda_1 = 576.96\text{nm}$ και $\lambda_2 = 579.07\text{nm}$.

4.4.3 *Μετρήσεις με τη βοήθεια του φασματοσκοπίου πρίσματος*

α) Μέτρηση της διαθλαστικής γωνίας πρίσματος

Φωτίζουμε τη διαθλαστική γωνία του πρίσματος με το επίπεδο μέτωπο κύματος που προέρχεται από το σωλήνα του κατευθυντήρα του τηλεσκοπίου (Σχ. 4.4.3.1). Τότε από τις δύο πλευρές του πρίσματος θα έχουμε δύο ανακλώμενες παράλληλες δέσμες. Κατόπιν με τη βοήθεια του τηλεσκοπίου, εναλλάξ, παρατηρούμε



(Σχ. 4.4.3.1)

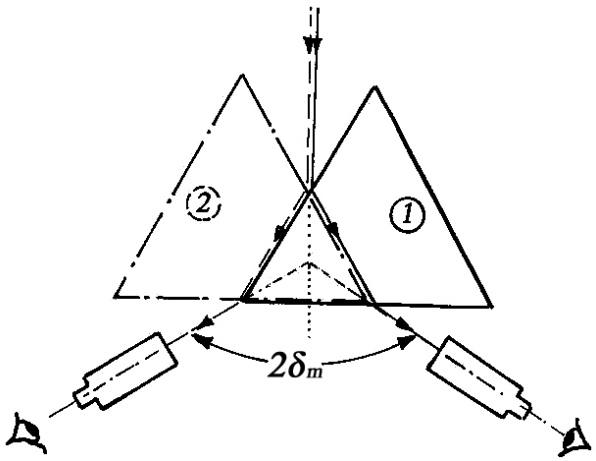
(και κεντράρουμε στην κατακόρυφη γραμμή του σταυρονήματος του προσοφθαλμίου) το είδωλο της σχισμής και σημειώνουμε τις δύο ενδείξεις των γωνιών (με τη βοήθεια των βερνιέρων) από το γωνιομετρικό δίσκο της βάσης του Φασματοσκοπίου. Αποδεικνύεται (βλ. Κεφ. 3: Γεωμ. Οπτική, Άσκ. 4 (λυμένη)), ότι η διαφορά αυτών των γωνιών είναι το διπλάσιο της διαθλαστικής γωνίας του πρίσματος. Αυτό ισχύει ανεξάρτητα από το αν το επίπεδο μέτωπο κύματος από τον κατευθυντήρα πέσει συμμετρικά ή όχι σε σχέση με την ανακλαστική γωνία a του πρίσματος.

β) Μέτρηση των δ.δ. πρίσματος σε συνάρτηση με το μ.κ. (καμπύλη διασκεδασμού), με τη μέθοδο του προσδιορισμού της γωνίας ελάχιστης εκτροπής

Ο υπολογισμός του δ.δ. πρίσματος για συγκεκριμένο μ.κ. μέσω του φασματοσκοπίου, γίνεται με βάση την μέτρηση της γωνίας ελάχιστης εκτροπής δ_m και την εφαρμογή της γνωστής σχέσης (βλ. Κεφ. 3 Γεωμ. Οπτική: ΠΑΡ/ΜΑ 1 (σχ. 1.12)):

$$n = \sin\frac{a+\delta_m}{2} \Big/ \sin\frac{a}{2} \qquad (4.4.3.1)$$

όπου a η διαθλαστική γωνία του πρίσματος. Φωτίζουμε αρχικά το πρίσμα με ένα επίπεδο μέτωπο κύματος επιθυμητού μ.κ. (Σχ. 4.4.3.2). Κατόπιν περιστρέφουμε το δίσκο πάνω στον οποίο βρίσκεται το πρίσμα και τα φέρνουμε σε θέση ελάχιστης εκτροπής (1). Η θέση αυτή, προσδιορίζεται με παρατήρηση μέσω του τηλεσκοπίου



(Σχ. 4.4.3.2)

και με τη βοήθεια της κατακόρυφης γραμμής του σταυρονήματος του προσοφθάλμιου. Πράγματι παρατηρώντας μέσα από το τηλεσκόπιο το είδωλο της σχισμής που αντιστοιχεί στο συγκεκριμένο μ.κ. και περιστρέφοντας τη βάση με το πρίσμα, βλέπουμε τα εξής: κατά τη μετακίνηση της η φωτεινή γραμμή φθάνει σε μία θέση του πεδίου, ακινητοποιείται και αμέσως επιστρέφει κινούμενη στην αντίθετη κατεύθυνση ενώ εμείς περιστρέφουμε το δίσκο προς την ίδια φορά. Η θέση αλλαγής της κατεύθυνσης κίνησης της γραμμής είναι και η θέση ελάχιστης εκτροπής. Η ανάγνωση της θέσης αυτής γίνεται μέσω της κλίμακας του φασματοσκοπίου, αφού πρώτα τοποθετήσουμε το σωλήνα του τηλεσκοπίου σ' εκείνη τη θέση όπου η κατακόρυφη του σταυρονήματος να συμπίπτει με τη θέση ελάχιστης εκτροπής.

Την ίδια ακριβώς διαδικασία ακολουθούμε για άλλη μια φορά όμως περιστρέφουμε το δίσκο με το πρίσμα έτσι ώστε να έλθει για δεύτερη φορά σε θέση ελάχιστης εκτροπής, φωτιζόμενο όμως από την άλλη του πλευρά (2). Σημειώνουμε τη δεύτερη αυτή ένδειξη και όπως πολύ εύκολα μπορούμε να δούμε από τη γεωμετρία του (Σχ. 4.4.3.2), η διαφορά των δύο γωνιών είναι ίση με το διπλάσιο της γωνίας ελάχιστης εκτροπής. Εφόσον έχουν μετρηθεί οι γωνίες a και δ_m μέσω της (σχ. 4.4.3.1) υπολογίζουμε το δ.δ. n για το συγκεκριμένο μ.κ. που χρησιμοποιήσαμε. Βασικής σημασίας για ακριβείς μετρήσεις, είναι η οριζοντίωση του δίσκου που είναι τοποθετημένο το πρίσμα και η οποία γίνεται μέσω τριών κοχλιών της περιστρεφόμενης βάσης του.

4.4.4 *Τα φάσματα των πηγών φωτός και η κατάταξή τους*

Τα φάσματα γενικά διακρίνονται σε ***φάσματα εκπομπής(transmission spectra)*** και ***φάσματα απορρόφησης(absorption spectra)***. Πιο συγκεκριμένα έχουμε:

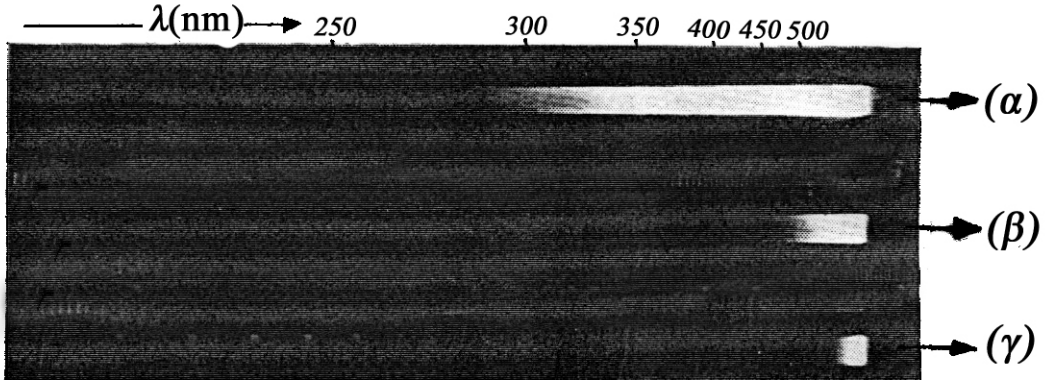
α) Συνεχή φάσματα εκπομπής.	***Συνεχή φάσματα απορρόφησης.***
(Continuous emission spectra)	***(Continuous absorption spectra)***
β) Γραμμικά φάσματα εκπομπής.	***Γραμμικά φάσματα απορρόφησης.***
(Line emission spectra)	***(Line absorption spectra)***
γ) Ταινιωτά φάσματα εκπομπής.	***Ταινιωτά φάσματα απορρόφησης.***
(Band emission spectra)	***(Band absorption spectra)***

Η παρατήρηση και η λήψη των φασμάτων συνήθως γίνεται μέσω αναλυτικών οργάνων των ***φασματόμετρων(spectometers)***, για ένα από τα οποία – το ***φασματοσκόπιο*** – έχουμε ήδη περιγράψει στοιχειωδώς τον τρόπο λειτουργίας του (§ 4.4.2).

Συνεχή φάσματα

Ένα συνεχές φάσμα εκπομπής, περιλαμβάνει την παράθεση μιας συνεχούς διαδοχής των συνιστωσών της ακτινοβολίας διαφορετικών μήκων κύματος μεταξύ δύο ορίων, χωρίς ενδιάμεσα να υπάρχει καμιά ασυνέχεια. Τα διάπυρα στερεά και υγρά συνήθως αποτελούν πηγές παραγωγής συνεχών φασμάτων. Τέτοια μπορεί να είναι ένα κομμάτι ερυθροπυρωμένος σίδηρος ή ένα άλλο μέταλλο, ένα κομμάτι πορσελάνη, η διάπυρη λάβα κ.λ.π. Το ***μέλαν σώμα (black body)*** το οποίο στοιχειωδώς μελετούμε στο (Κεφ. 8: Παραγωγή και ανίχνευση του φωτός), αποτελεί ένα κλασικό παράδειγμα εκπομπής συνεχούς φάσματος και μάλιστα για περιοχές από το υπεριώδες μέχρι το υπέρυθρο. Στις (Εικ. 4.4.4.1) βλέπουμε τα συνεχή φάσματα εκπομπής για τις περιπτώσεις διάπυρων στερεών στην ορατή περιοχή. Η (α) αντιστοιχεί σε φάσμα από τόξο άνθρακα (Σχ. 4.4.4.9α) θερμοκρασίας (θετικού πόλου) 4000^0C. Η (β) και η (γ) αντιστοιχούν σε φάσματα νήματος Βολφραμίου θερμοκρασίας 2000^0C και 1500^0C αντίστοιχα. Το φάσμα της (α) περιλαμβάνει όλη τη γκάμα των χρωμάτων από το ιώδες μέχρι το κόκκινο. Αυτό της (β) περιλαμβάνει μόνο την πορτοκαλί – κόκκινη περιοχή, ενώ αυτό της (γ) μόλις και διακρίνεται λίγο το βαθύ κόκκινο. Τα φάσματα έχουν ληφθεί με φασματογράφο πρίσματος. Αν θεωρήσουμε τις προαναφερόμενες πηγές σαν κατά προσέγγιση μέλανα σώματα, τότε από τις καμπύλες των συναρτήσεων κατανομής I_λ (φασματικές κατανομές ενεργειακής πυκνότητας) (βλ. Κεφ. 8: Παραγωγή και ανίχνευση του φωτός) για τις αντίστοιχες

θερμοκρασίες, μπορούμε να επιβεβαιώσουμε αυτά που βλέπουμε στις εικόνες όσον αφορά τα όρια εκπομπής της κάθε πηγής.



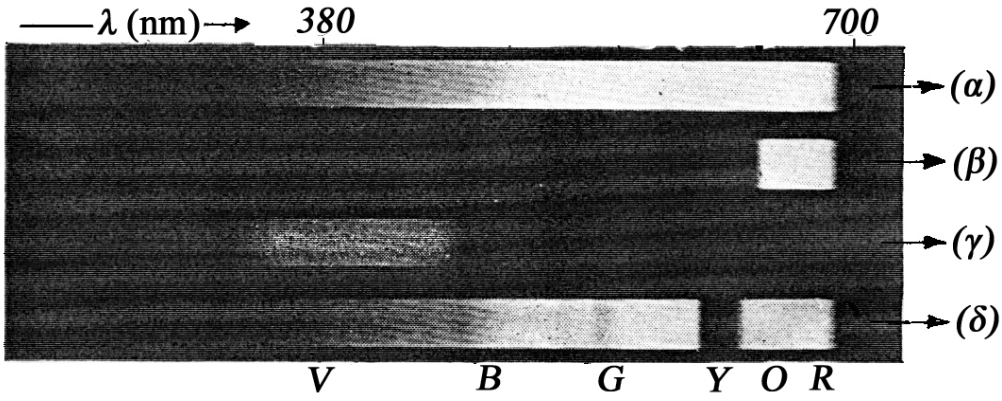
(Εικ. 4.4.4.1)

Ένα συνεχές φάσμα απορρόφησης θα προκύψει αν μεταξύ μιας πηγής που εκπέμπει συνεχές φάσμα ακτινοβολιών και του αναλυτικού οργάνου παρεμβληθεί ένα μέσο το οποίο θα απορροφήσει τμήματα του συνεχούς φάσματος. Στην (Εικ. 4.4.4.2) μπορούμε να δούμε τα εξής: (α) το συνεχές φάσμα εκπομπής μιας πηγής μεταξύ 380 -750 nm. (β) το τμήμα του συνεχούς φάσματος που παραμένει (κόκκινο – πορτοκαλί περιοχή) όταν μεταξύ πηγής – οργάνου παρεμβάλλουμε ένα κόκκινο φίλτρο (γ). Το τμήμα του συνεχούς φάσματος που παραμένει (ιώδης και λίγη από τη μπλε περιοχή) όταν παρεμβάλλουμε ένα ιώδες φίλτρο (δ). Το τμήμα του συνεχούς φάσματος που παραμένει όταν παρεμβάλλουμε ένα γυαλί με προσμίξεις Νεοδυμίου (φίλτρο). Στην τελευταία περίπτωση, εκτός ορισμένων άλλων ζωνών απορρόφησης υπάρχει μια έντονη στην κίτρινη περιοχή. Στα διαγράμματα των (Σχ. 4.4.4.3) φαίνονται οι καμπύλες διαπερατότητας % για τις περιπτώσεις των τριών προηγούμενων φίλτρων. Σαν διαπερατότητα ενός φίλτρου ορίζουμε κατά τα γνωστά το λόγο της διερχόμενης από το φίλτρο έντασης προς την προσπίπτουσα, αν παραλείψουμε σαν αμελητέα την ανακλώμενη. Συνεχή φάσματα απορρόφησης μπορούμε επίσης να δούμε και στο τέλος της (Εικ. 4.4.4.4) όπου το (α) αντιστοιχεί στο ήδη γνωστό φάσμα του φίλτρου Νεοδυμίου, το (β) στο φάσμα απορρόφησης διαλύματος χλωροφύλλης και το (γ) σ' αυτό του διαλύματος της οξυαιμογλοβίνης.

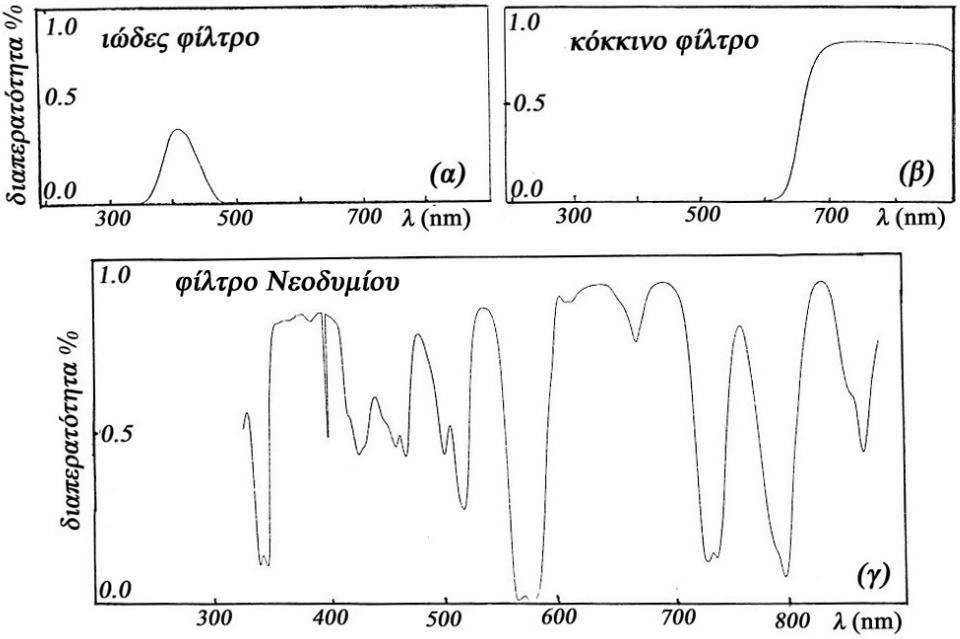
Γραμμικά φάσματα

Γραμμικό φάσμα είναι αυτό που αποτελείται από ένα σχετικά μικρό αριθμό διακεκριμένων συνιστωσών ακτινοβολίας (στο φασματοσκόπιο αναγνωρίζονται σαν λεπτές κατακόρυφες γραμμές) (Εικ. 4.4.2.2), όπου το κέντρο της κατανομής

της κάθε μίας, αντιστοιχεί σ' ένα συγκεκριμένο μ.κ. λ_0 και το σχετικό τους πλάτος χαρακτηρίζεται από το ***εύρος (band pass)*** μ.κ. $\Delta\lambda$ στο μισό του μεγίστου της έντασής τους (βλ. Κεφ. 6: Συμβολή του φωτός, ΘΕΜΑ 2). Η λήψη των γραμμικών φασμάτων γίνεται όπως και για τα συνεχή μέσω των φασματομέτρων.



(Εικ. 4.4.4.2)



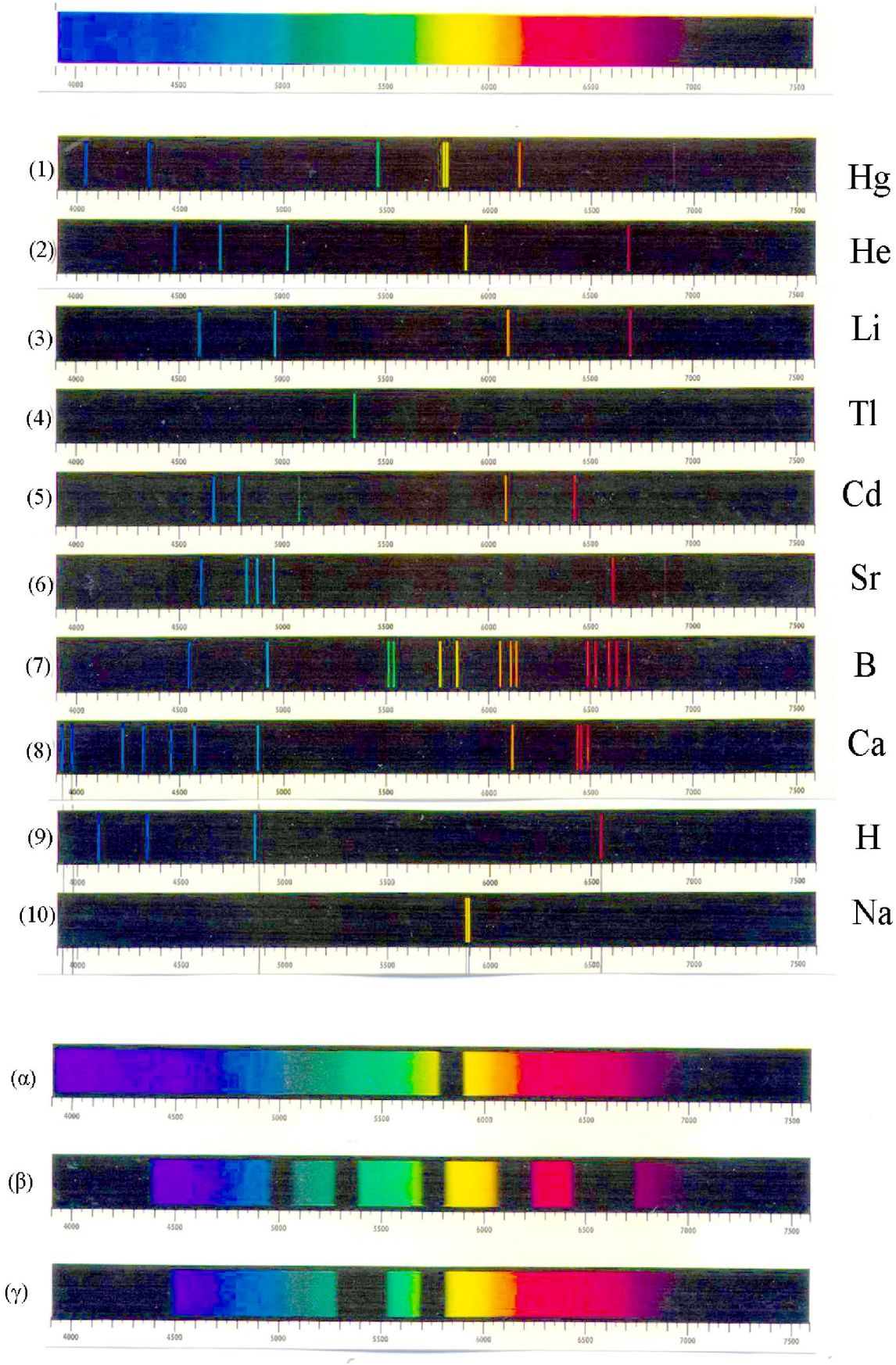
(Σχ. 4.4.4.3)

Ο τρόπος παραγωγής γραμμικών φασματών, σχετίζεται με εκπομπή φωτός μέσω διεγέρσεων και αποδιεγέρσεων ατόμων αερίων ή ατμών στερεών και υγρών. Οι ενεργειακές στάθμες των ηλεκτρονίων στα άτομα στις περιπτώσεις αυτές είναι διακεκριμένες τον αριθμό και αυτός ακριβώς είναι ο λόγος ανάδειξης απλών στη δομή τους φασμάτων εκπομπής ή απορρόφησης. Συνήθεις πηγές παραγωγής γραμ-

μικών φασμάτων εκπομπής είναι οι λυχνίες κενού (φασματικές λυχνίες) οι οποίες περιέχουν τα προαναφερόμενα αέρια (ή στερεά και υγρά τα οποία πρόκειται να ατμοποιηθούν κατά τη λειτουργία τους) και οι οποίες υποβάλλονται σε εκκένωση τόξου μέσω της εφαρμογής στα άκρα τους υψηλής τάσης (βλ. Κεφ. 8: Παραγωγή και ανίχνευση του φωτός). Η δομή των γραμμικών φασμάτων εξαρτάται σημαντικά από τον τρόπο και τις συνθήκες διέγερσης των αερίων. Αν π.χ. μια λυχνία κενού περιέχει το αέριο μεθάνιο (CH_4) τότε το γραμμικό φάσμα που παίρνουμε θα είναι αυτό του υδρογόνου (H_2). Πράγματι οι γραμμές που θα μπορούσαν να οφείλονται στον άνθρακα (C) είναι τουλάχιστον για την περιοχή του ορατού φάσματος πάρα πολύ ασθενικές. Το γεγονός αυτό συμβαίνει επειδή σε συνηθισμένες συνθήκες, το άτομο του άνθρακα είναι δύσκολο να διεγερθεί.

Στην (Εικ. 4.4.4.4) φαίνονται οι γραμμές των φασμάτων εκπομπής (1) των ατμών του Υδράργυρου (Hg – Mercury), (2) του Ηλίου (He – Helium), (3) των ατμών του Λιθίου (Li – Lithium), (4) των ατμών του Θαλίου (Tl – Thallium), (5) των ατμών του Καδμίου (Cd- Cadmium), (6) των ατμών του Στροντίου (Sr – Strontium), (7) των ατμών του Βαρίου (Ba – Barium), (8) των ατμών του Ασβεστίου (Ca – Calcium), (9) του υδρογόνου (H – Hydrogen) και (10) των ατμών του Νατρίου (Na – Sodium). Σαν αναφορά στην κορυφή της εικόνας δίνεται το συνεχές φάσμα της ορατής περιοχής χωρίς αυτό να σημαίνει ότι δεν συναντούμε γραμμές στην υπεριώδη και υπέρυθρη περιοχή του Η/Μ φάσματος. Στον (Πιν. 4.4.4.5) δίνονται με μεγάλη ακρίβεια (σε Å) οι γραμμές εκπομπής των στοιχείων: Na, Hg, He, Cd και H, σε τρεις διαβαθμίσεις εντάσεων (*ι*- ισχυρή, *μ* – μεσαία, *α* – ασθενική). Παρατηρούμε ότι αρκετές από αυτές δεν εμφανίζονται στην αντίστοιχη παράθεση γραμμών της (Εικ. 4.4.4.4). Αυτό θα οφείλεται στο γεγονός ότι είτε είναι πολύ ασθενικές είτε δεν εμφανίζονται λόγω διαφορετικών συνθηκών διέγερσης του συγκεκριμένου στοιχείου.

Αέρια και ατμοί στερών και υγρών τα οποία όταν διεγείρονται εκπέμπουν ακτινοβολίες χαρακτηριστικών μηκών κύματος, με τον ίδιο ακριβώς τρόπο απορροφούν ενέργεια στα ίδια μ.κ. (βλ. φαινόμενα απορρόφησης §4.2). Τα φάσματα που προκύπτουν ονομάζονται ***γραμμικά φάσματα απορρόφησης.*** Έστω ότι η σχισμή εισόδου ενός φασματοσκοπίου φωτίζεται με μια πηγή εκπομπής συνεχούς φάσματος. Μεταξύ πηγής και σχισμής παρεμβάλλουμε ένα δοχείο με διαφανή παράλληλα τοιχώματα, μέσα στο οποίο υπάρχει ποσότητα Χλωριούχου Νατρίου (NaCl). Θερμαίνουμε το δοχείο μέχρις ότου στο εσωτερικό του δημιουργηθούν ατμοί NaCl. Τότε αυτό που θα παρατηρήσουμε μέσω του φασματοσκοπίου θα είναι ένα συνεχές φάσμα με μια όμως έντονη σκοτεινή γραμμή. Είναι ακριβώς η θέση της κίτρινης γραμμής (στην πραγματικότητα δύο γραμμές πολύ κοντά μεταξύ τους) εκπομπής των ατμών του Na. Πάλι βλέπουμε εδώ ότι έχουμε απορρόφηση από τα άτομα μόνο


(1) Hg
(2) He
(3) Li
(4) Tl
(5) Cd
(6) Sr
(7) B
(8) Ca
(9) H
(10) Na
(α)
(β)
(γ)
4000
4500
5000
5500
6000
6500
7000
7500

(Εικ. 4.4.4.4)

Na - Νάτριο	Hg- Υδρ/ρος	He- Ήλιο	Cd- Κάδμιο	H - Υδρογόνο
5.889.95 ι.	4045.56 μ.	4387.93 α.	4678.16 μ.	6562.82 ι.
5.895.92 μ.	4077.81 μ.	4437.55 α.	4799.92 ι.	4861.33 μ.
	4358.35 ι.	4471.48 ι.	5085.82 ι.	4340.46 α.
	4916.04 α.	4713.14 μ.	6438.47 ι.	4101.74 α.
	5460.74 ι.	4921.93 μ.		
	5769.59 ι.	5015.67 ι.		
	5790.65 ι.	5047.74 α.		
		5875.62 ι.		
		6678.15 μ.		

(Πίν. 4.4.4.5)

του Na. Τα άτομα του Cl δεν είναι δυνατόν ν' απορροφήσουν με βάση τις προηγούμενες συνθήκες. Αν όμως διεγερθούν τελικά με άλλο τρόπο τότε απορροφούν έντονα στην περιοχή του υπεριώδους.

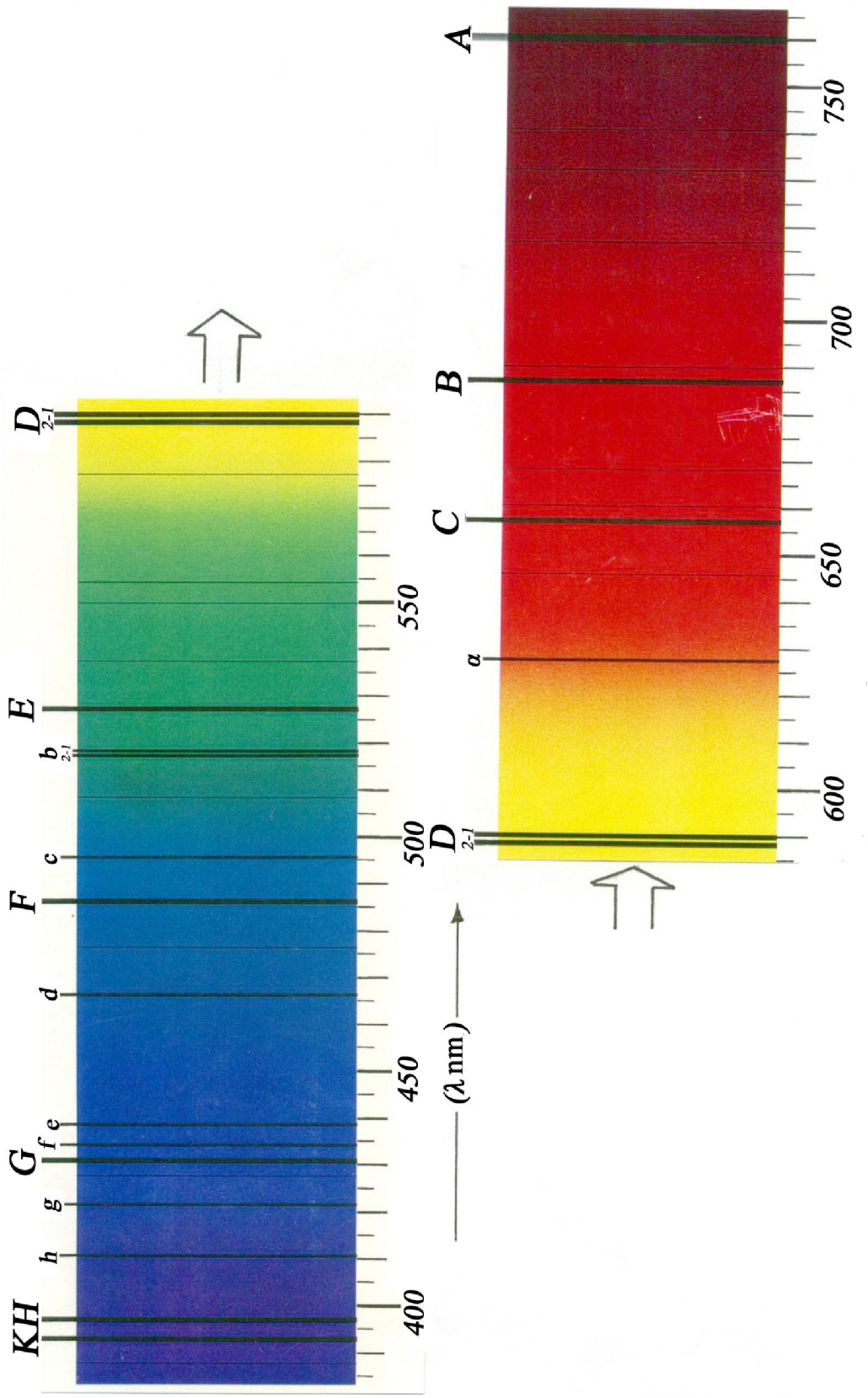
Το φάσμα της (Εικ. 4.4.4.6) αντιστοιχεί στο ***φάσμα απορρόφησης του ηλιακού φωτός*** και οι γραμμές του ονομάζονται ***γραμμές απορρόφησης Fraunhofer.*** Το φάσμα αυτό προκύπτει από την παρατήρηση μέσω φασματοσκοπίου του φωτός που προέρχεται από τον ήλιο. Το συνεχές φάσμα του φωτός που προέρχεται από την φωτόσφαιρα του ηλίου, είναι αναγκασμένο να περάσει από την επόμενη ζώνη του που είναι η χρωμόσφαιρα. Στην περιοχή αυτή λόγω συγκεκριμένων θερμοκρασιών και πιέσεων που επικρατούν, υφίστανται κυρίως άτομα διαφόρων στοιχείων τα οποία και απορροφούν χαρακτηριστικές συνιστώσες ακτινοβολίας του συνεχούς φάσματος της φωτόσφαιρας. Ορισμένες από τις γραμμές (που υπολογίζονται σε πάνω από 20.000) ο Fraunhofer (που προσδιόρισε περί τις 700) περιέγραψε με συγκεκριμένους χαρακτήρες. Επειδή είναι διάσπαρτες σ' όλες τις περιοχές του ορατού φάσματος, ορισμένες επιλέγονται σαν γραμμές αναφοράς, έτσι ώστε το φως τους να χρησιμοποιείται για τον προσδιορισμό οπτικών σταθερών διαφόρων οπτικών μέσων όπως π.χ. οι δ.δ. n_F, n_D, n_C των γυαλιών (§4.3.2). Οι γραμμές *F*, *D* και *C* αντιστοιχούν στην μπλε, κίτρινη και κόκκινη περιοχή του ορατού φάσματος. Ο (Πιν. 4.4.4.7) μας δίνει με μεγάλη ακρίβεια τις πιο έντονες γραμμές Fraunhofer: συμβολισμό, χημικό στοιχείο προέλευσης αντίστοιχο μ.κ. και σχετική ένταση.

Θα πρέπει ν' αναφέρουμε ειδικά ότι η γραμμή a ($\simeq 6300$ Å) οφείλεται στην απορρόφηση από το οξυγόνο (O_2) της ατμόσφαιρας της γης. Επίσης στο φάσμα μετά τα 7200 Å παρουσιάζονται πέντε ταινίες γραμμών (Τελουριακές γραμμές) που οφείλονται επίσης στην απορρόφηση από τους υδρατμούς και το O_2 της ατμόσφαιρας της γης. Γίνονται πολύ εμφανείς στην διεύθυνση του ορίζοντα κατά τη δύση του ηλίου. (βλ. Πίν. 4.4.4.7).

Φάσματα ταινιών

Η δομή των μορίων, κατά τα γνωστά, είναι πιο περίπλοκη από ότι αυτή των ατόμων. Το γεγονός συνίσταται στην ύπαρξη περισσότερων βαθμών ελευθερίας και κατά προέκταση ενεργειακών σταθμών τις οποίες μπορούν να καταλαμβάνουν τα μόρια. Οι ενεργειακές αυτές στάθμες οφείλονται στις νέες μορφές των τροχιακών των μορίων και είναι συνδυαστικά παρά πολύ περισσότερες από ότι αυτές των ατόμων. Το γεγονός συνεπάγεται ότι οι φασματικές γραμμές που προκύπτουν από τις μεταπτώσεις μεταξύ των ενεργειακών σταθμών των ηλεκτρονίων στα μόρια, θα είναι επίσης πάρα πολλές δηλ. οι φασματικές γραμμές εκπομπής θα είναι πολύ πυκνές μεταξύ τους ή ακόμα θα υπερκαλύπτονται και θα αναμιγνύονται. Το γεγονός οδηγεί στην ταινιωτή δομή των μοριακών φασμάτων, τουλάχιστον εφόσον η διακριτική ικανότητα του αναλυτικού οργάνου με το οποίο τις παρατηρούμε δεν είναι εξαιρετικά μεγάλη.

Στην (Εικ. 4.4.4.8) μπορούμε να δούμε τα μοριακά φάσματα: (α) του αερίου μίγματος, αζώτου (N_2) και μονοξειδίου του αζώτου (NO), (β) του φθοριούχου αντιμονίου (SbF) και (γ) του κυανίου (CN). Συνήθως οι ταινίες εμφανίζονται με τη μια τους πλευρά οξεία (τη λεγόμενη κεφαλή) η οποία αποσβένεται σταδιακά προς την άλλη κατεύθυνση. Μπορεί σ' ένα φάσμα να υπάρχουν από λίγες έως μια ολόκληρη σειρά από ταινίες εκπομπής. Η λήψη όμως του φάσματος από όργανο μεγάλης διακριτικής ικανότητας αναδεικνύει τη διακριτή δομή των ταινιών (π.χ. όπως αυτό φαίνεται στο φάσμα του κυανίου της (Εικ. 4.4.4.8γ). Υπάρχουν σαφείς πειραματικές ενδείξεις ότι η ταινιωτή δομή των φασμάτων οφείλεται στα μόρια που περιέχουν ένα ή περισσότερα συγκεκριμένα άτομα. Πράγματι η λήψη του ατομικού φάσματος του ασβεστίου (Ca) είναι ανεξάρτητη από το είδος του άλατος π.χ. $CaCl_2$, CaF_2, $CaBr_2$. Το καθένα όμως από τα τελευταία δίνει διαφορετικό ταινιωτό φάσμα. Επίσης είναι γνωστό ότι τουλάχιστον για τα μόρια των αερίων οι ταινίες εμφανίζονται μόνον όταν τα τελευταία υποστούν ήπια διέγερση. Έστω π.χ. ότι χρησιμοποιούμε σε μια λυχνία εκκένωσης (προκειμένου να διεγείρουμε) αέριο άζωτο (N_2). Αν το αέριο είναι αραιό και η εφαρμοζόμενη τάση στα άκρα της λυχνίας σχετικά χαμηλή, θα εμφανιστεί φάσμα ταινιών. Όταν όμως η πυκνότητα του αερίου γίνει αρκετά μεγάλη και η εφαρμοζόμενη τάση πολύ υψηλή τότε συνήθως γίνεται διάσπαση των μορίων του N_2 με συνέπεια την παραγωγή ατομικών πλέον γραμμικών φασμάτων. Θα πρέπει επίσης να αναφέρουμε ότι το κάθε απλής μορφής ταινιωτό φάσμα οφείλεται συνήθως στη διέγερση διατομικού μορίου. Πράγματι όταν π.χ. χρησιμοποιούμε φθοριούχο ασβέστιο (CaF_2) σε τόξο άνθρακα (Σχ. 4.4.4.9α) ή φλόγα λύχνου Bunsen προκειμένου να το διεγείρουμε, τότε το παραγόμενο μοριακό φάσμα εκπομπής οφείλεται στο CaF. Επίσης σε λυχνία εκκένωσης με αέριο CO_2 οι ταινίες εκπομπής οφείλονται στο CO.

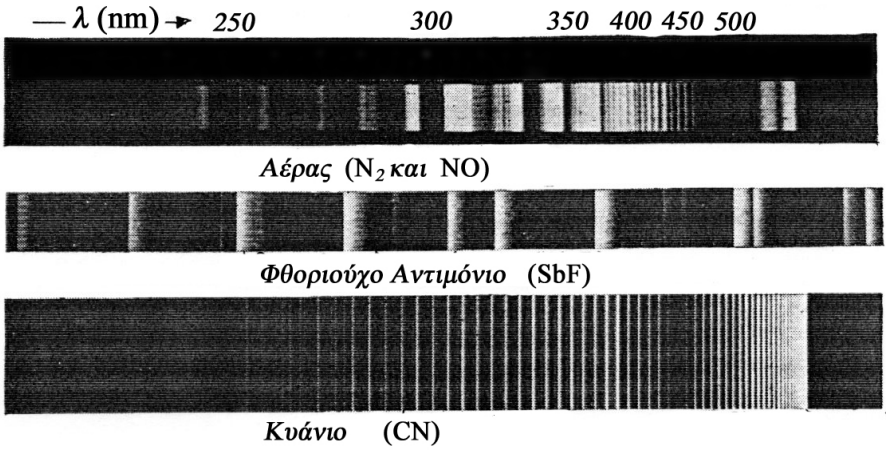

KH
G
F
E
D
h
g
f
e
d
c
b
2-1
2-1
400
450
500
550
(λ nm)
D
2-1
α
C
B
A
600
650
700
750

(Εικ. 4.4.4.6)

Γραμ-μή	Πηγή	μ.κ.(A°)	Έντα-ση	Γραμμή	Πηγή	μ.κ.(Å)	Έντα-ση
y	$AtmO_2$*	8987.65	10	G	Fe, Ti*	4307.912	6
x_4	Mg	8806.775	14		Ca	4307.747	3
x_3	Ca+	8662.170	23		Ca	4226.740	20
x_2	Ca+	8542.144	25	h	Hg	4101.748	40
x_1	Ca+	8498.062	20	H	Ca+	3968.492	700
Z	$AtmO_2$*	8226.962	20	K	Ca+	3933.682	1.000
A	$AtmO_2$*	7593.695	10	L	Fe	3820.436	25
a	$AtmO_2$*	7184.526	8	M	Fe	3727.634	4
B	$AtmO_2$*	6867.187	4	N	Fe	3581.209	30
C	H_a	6562.808	40	O	Fe	3441.019	15
a	$AtmO_2$	6276.607	2	P	i+	3361.193	8
D_1	Na	5895.940	20	Q	Fe	3286.772	7
D_2	Na	5889.973	30	R	Ca+	3181.276	3
D_3	He	5875.650			Ca+	3179.342	5
	He	5875.618		r	Fe	3143.996	2
E	Fe	5270.388	4		Ti+	3143.764	4
	Ca	5270.268	3	S_1	Ni	3101.895	3
	Fe	5269.550	8		Ni	3101.574	4
b_1	Mg	5183.619	30	S_2	Fe	3100.682	3
b_2	Mg	5172.698	20		Fe	3100.325	4
b_3	Fe+	5169.050	4		Fe	3099.987	3
	Fe	5168.908	3		Fe	3099.896	3
b_4	Fe	5167.508	5	s	Fe	3047.614	35
	Mg	5167.328	15	T	Fe	3021.077	30
F	Hg	4861.342	30		Fe	3020.656	40
g	H_7	4340.475	20		Fe	3020.490	20
				t	Fe,Ni	2994.436	10

* ταινίες

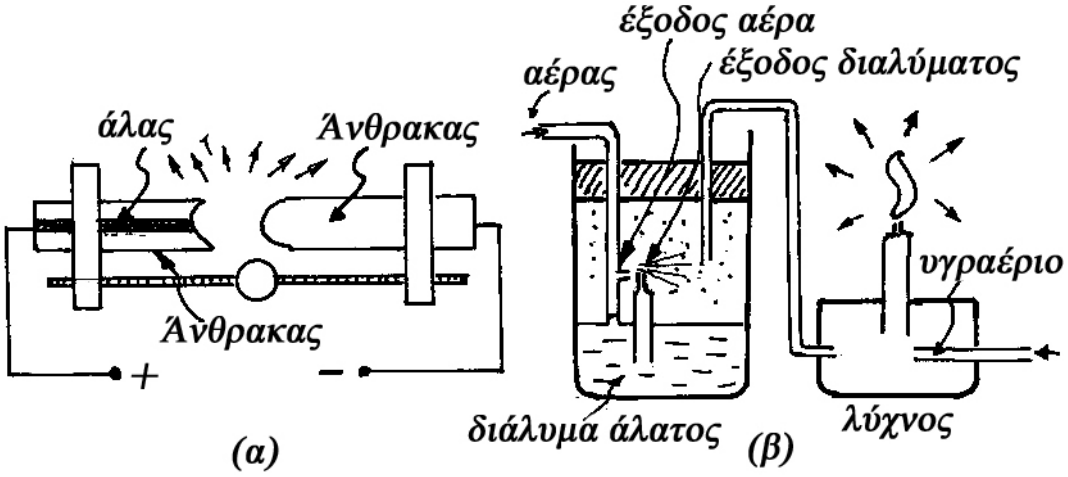
(Πίν. 4.4.4.7)



(Εικ. 4.4.4.8)

<u>Σημείωση</u>

Το ***Βολταϊκό τόξο (Arc)*** (Σχ. 4.4.4.9α), αποτελείται από δύο κυλινδρικές ράβδους άνθρακα ορισμένου μήκους και διαμέτρου, που με κατάλληλο ωρολογιακό μηχανισμό μπορούμε να τις πλησιάζουμε με μια ορισμένη ταχύτητα. Η μια από τις δύο ράβδους στον πυρήνα της περιέχει το άλας, του οποίου θέλουμε να πάρουμε το φάσμα και αποτελεί τον θετικό πόλο μιας πηγής συνεχούς τάσης που τροφοδοτεί τις δύο ράβδους. Η εκκίνηση της λειτουργίας της διάταξης γίνεται όταν προς στιγμήν ενώσουμε και αμέσως απομακρύνουμε τις άκρες των ράβδων. Τότε στο διάκενο μεταξύ τους δημιουργείται ένα πολύ φωτεινό τόξο που ακτινοβολεί συνεχώς εφ' όσον με τον μηχανισμό που προαναφέραμε διατηρείται μεταξύ των άκρων τους σταθερή απόσταση. Για τη λήψη του φάσματος τοποθετούμε τη σχισμή εισόδου του φασματοσκόπιου κοντά στην περιοχή του τόξου ή το απεικονίζουμε στη σχισμή μέσω οπτικού συστήματος (συμπυκνωτή φακού). Οι συνθήκες διέγερσης του άλατος καθορίζονται συνήθως από τη θερμοκρασία που αναπτύσσεται στην περιοχή δημιουργίας του τόξου (περιοχή ιονισμού). Όταν βέβαια τα δύο ηλεκτρόδια της



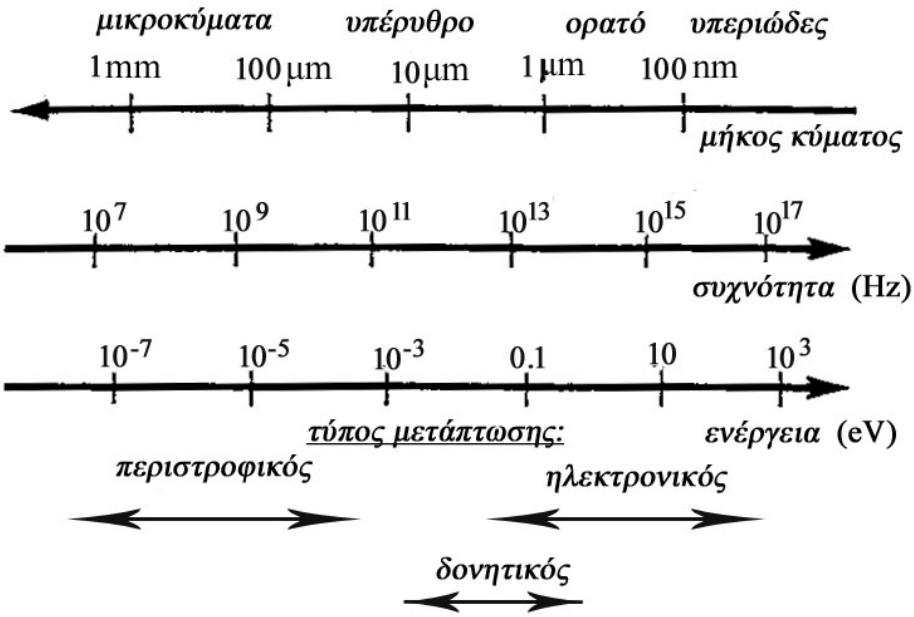
(Σχ. 4.4.4.9)

διάταξης συνίστανται καθαρά από άνθρακα, το εκπεμπόμενο από το τόξο φάσμα είναι συνεχές (λευκό φως).

Στη διάταξή του (Σχ. 4.4.4.9β) διακρίνουμε ένα ***λύχνο Bunsen*** που η φλόγα του ($\theta \simeq 1800^0$C) συντηρείται με την καύση υγραερίου. Ο αέρας που ενισχύει την καύση είναι εμπλουτισμένος με σταγονίδια διαλύματος του άλατος του στοιχείου του οποίου θέλουμε να πάρουμε το φάσμα. Ο εμπλουτισμός γίνεται ως εξής: Διοχετεύουμε μέσω σωλήνα αέρα με πίεση στο χώρο που υπάρχει το διάλυμα του άλατος. Ο σωλήνας αυτός στο άκρο του διαθέτει ένα πολύ μικρό άνοιγμα (ακροφύσιο), από όπου βγαίνει ο αέρας με μεγάλη ταχύτητα. Απέναντι ακριβώς από το άνοιγμα

αυτό υπάρχει το στόμιο ενός πολύ μικρής διαμέτρου σωλήνα που είναι εμβαπτισμένος και επικοινωνεί με το διάλυμα. Τότε η υποπίεση που δημιουργείται λόγω της μεγάλης ταχύτητας του αέρα, που περνάει πάνω από αυτό το άνοιγμα, προωθεί ποσότητα διαλύματος προς το στόμιό του που παρασύρεται από τον αέρα και διασπείρεται στο χώρο πάνω από το διάλυμα με μορφή σταγονιδίων. Για τη λήψη του φάσματος η φλόγα του λύχνου οδηγείται στην είσοδο του φασματοσκοπίου.

Η πολυπλοκότητα των μοριακών φασμάτων εκπομπής και απορρόφησης δεν δικαιολογείται αποκλειστικά και μόνο από την αύξηση των ενεργειακών σταθμών των ηλεκτρονίων λόγω της σύνθετης μοριακής δομής ***(ηλεκτρονικές μεταπτώσεις (electronic transitions))***. Τα μόρια επίσης μπορούν να ανταλλάξουν ενέργεια και με άλλους τρόπους που δεν διαθέτουν τα άτομα. Αυτοί οι τρόποι είναι μέσω περιστροφής και ταλάντωσης των ατόμων τους. Η ενέργεια σ' αυτές τις περιπτώσεις είναι κβαντισμένη και οι μεταπτώσεις μεταξύ των ενεργειακών σταθμών οδηγούν σε εκπομπή ακτινοβολιών δηλ. σε εμπλουτισμό των φασμάτων με νέες φασματικές γραμμές ή ταινίες. Τέτοιου είδους όμως γραμμές εμφανίζονται σε εντελώς διαφορετικά τμήματα του Η/Μ φάσματος από ότι αυτές που προκαλούν οι ηλεκτρονικές μεταπτώσεις. Όπως φαίνεται από το διάγραμμα του (Σχ. 4.4.4.10), τυπικά περιλαμ-



(Σχ. 4.4.4.10)

βάνουν ενεργειακές μεταβολές μεταξύ περίπου $0.1-10^{-7}\,\mathrm{eV}\,(10^{13}-10^{7}\,\mathrm{Hz})$. Οι ***δονητικές μεταπτώσεις (vibrational transitions)*** μεταξύ των ατόμων των μορίων, περι-

λαμβάνουν ενεργειακές μεταβολές περίπου ίσες με το 1% από ότι αυτές των ηλεκτρονικών μεταπτώσεων. Αποτέλεσμα θα είναι η εμφάνιση γραμμών στην υπέρυθρη περιοχή του Η/Μ φάσματος. ($\simeq 10^{-3} - 0.1\text{eV}$) ή ($10^{11} - 10^{13}\text{Hz}$) ή ($10 - 1\mu\text{m}$).Ενεργειακές μεταβολές τουλάχιστον 100 φορές μικρότερες από αυτές που διαμεσολαβούνται μέσω των ηλεκτρονίων είναι χαρακτηριστικές των ***περιστροφικών μεταπτώσεων (rotational transitions)*** των μορίων και οι γραμμές τους εμφανίζονται στην περιοχή των μικροκυμάτων: ($\simeq 10^{-3} - 10^{-7}\text{eV}$) ή ($10^{11} - 10^{7}\text{Hz}$) ή ($10\mu\text{m} - 1\text{mm}$). Οι ενεργειακές αυτές διαφορές προκύπτουν εξαιτίας των διαφορών στις μάζες μεταξύ των ηλεκτρονίων και των πυρήνων των ατόμων και μπορούν τυπικά να διαβαθμιστούν με βάση τις δύο επόμενες απλές σχέσεις:

$$\frac{E_e}{E_v} \simeq \sqrt{\frac{m_n}{m_e}} \qquad (4.4.4.1) \qquad \text{και} \qquad \frac{E_e}{E_r} \simeq \frac{m_n}{m_e} \qquad (4.4.4.2)$$

όπου E_e, E_v, E_r είναι οι ενέργειες των κβάντων ακτινοβολίας που προκύπτουν λόγω ηλεκτρονικών, δονητικών και περιστροφικών μεταπτώσεων. m_e, m_n είναι αντίστοιχα οι μάζες του ηλεκτρονίου και του πυρήνα ενός ατόμου.

4.5 *Ταχύτητα ομάδας. Σχέσεις μεταξύ ταχύτητας ομάδας και ταχύτητας φάσης σε οπτικά υλικά που εμφανίζουν διασκεδασμό*

4.5.1 *Επαλληλία χρονικά μεταβαλλόμενων διαταραχών δύο διαφορετικών συχνοτήτων. Διακροτήματα.*

Ας θεωρήσουμε την επαλληλία δύο αρμονικών διαταραχών οι οποίες μεταβάλλονται χρονικά και των οποίων οι συχνότητες είναι διαφορετικές. Θα θεωρήσουμε επίσης ότι οι τιμές των συχνοτήτων είναι παραπλήσιες δηλ. η διαφορά τους είναι πολύ μικρότερη της μέσης τιμής τους. Η περίπτωση αφορά πλείστα όσα φυσικά φαινόμενα από το πεδίο της κυματικής φυσικής δύο από τα οποία θα περιγράψουμε στα επόμενα, εφόσον κατ' αρχή κατανοήσουμε το αποτέλεσμα της επαλληλίας των δύο συνιστωσών διαταραχών.

Χωρίς να κινδυνεύουμε να χάσουμε κάτι από τη γενικότητα των συμπερασμάτων της ανάλυσης, υποθέτουμε ότι τα πλάτη όπως και οι αρχικές φάσεις των διαταραχών είναι τα ίδια. Κάτω από αυτές τις συνθήκες οι διαταραχές καθώς και η επαλληλία τους θα δίνονται από τις σχέσεις:

$$\psi_1 = \psi_0 \cos\omega_1 t, \qquad \psi_2 = \psi_0 \cos\omega_2 t \tag{4.5.1.1}$$

$$\psi = \psi_1 + \psi_2 = \psi_0 \cos\omega_1 t + \psi_0 \cos\omega_2 t \tag{4.5.1.2}$$

Η (σχ. 4.5.1.2) με τη βοήθεια της τριγωνομετρικής ταυτότητας:

$$\cos a + \cos\beta = 2\cos\frac{a+\beta}{2}\cdot\cos\frac{a-\beta}{2} \quad \text{γράφεται:}$$

$$\psi = \psi_m(t)\cos\bar{\omega}t = 2\psi_0 \cos\omega_m t \cos\bar{\omega}t \tag{4.5.1.3}$$

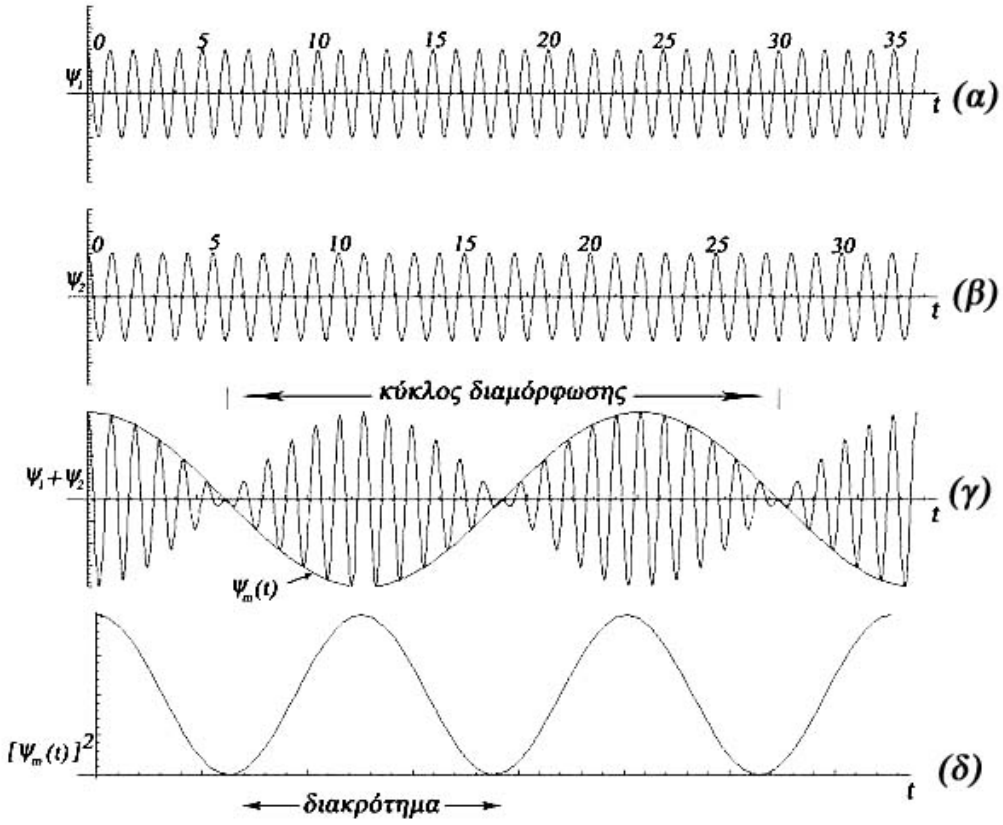
Όπου: $\omega_m = (\omega_1 - \omega_2)/2$ και $\bar{\omega} = (\omega_1 + \omega_2)/2$ (4.5.1.4)

Επομένως μπορούμε να συμπεράνουμε ότι η (σχ. 4.5.1.3) παριστάνει μια ταλάντωση με γωνιακή συχνότητα $\bar{\omega}$ της οποίας όμως το πλάτος $\psi_m(t)$ δεν είναι σταθερό αλλά μεταβάλλεται χρονικά. Επειδή θεωρήσαμε ότι $\omega_1 \simeq \omega_2$ τότε η συχνότητα ω_m η οποία καθορίζει τη μεταβολή του πλάτους $\psi_m(t)$ και την οποία ονομάζουμε ***συχνότητα διαμόρφωσης*** είναι πολύ μικρότερη της $\bar{\omega}$ $(\omega_m << \bar{\omega})$ την οποία ονομάζουμε ***μέση συχνότητα***. Άρα το πλάτος που καθορίζεται από τον παράγοντα $\cos\omega_m t$ μεταβάλλεται πολύ πιο αργά κατά τη διάρκεια των πολύ περισσότερων ταλαντώσεων στο ίδιο χρονικό διάστημα που καθορίζεται από τον παράγοντα $\cos\bar{\omega}t$.

Μια γραφική παράσταση των ψ_1, ψ_2 και $\psi_1 + \psi_2$ συναρτήσει του χρόνου φαίνεται στα (Σχ. 4.5.1.1α,β,γ). Προκειμένου να γίνει διακριτό το φαινόμενο του πολύ αργά μεταβαλλόμενου πλάτους $\psi_m(t) = 2\psi_0 \cos\omega_m t$ επιλέξαμε το λόγο $\omega_1/\omega_2 = \nu_1/\nu_2 = 12/11$. Στο (Σχ. 4.5.1.1γ) που παριστάνει την επαλληλία $\psi_1 + \psi_2$, γίνεται εμφανής η δημιουργία της διαμόρφωσης της αρμονικής διαταραχής $\cos\bar{\omega}t$ (ταχεία μεταβολή) από το μεταβαλλόμενο πλάτος $\psi_m(t)$ (βραδεία μεταβολή). Οι σχηματισμοί μεταξύ των περιόδων της βραδείας μεταβολής του πλάτους ονομάζονται ***διακροτήματα (beats)***. Όπως γίνεται εύκολα εμφανές, μεταξύ ενός ***κύκλου διαμόρφωσης (modulation cycle)*** που αντιστοιχεί σε μια περίοδο μεταβολής του πλάτους $\psi_m(t)$, περιλαμβάνονται δύο διακροτήματα.

Η δημιουργία των διακροτήματων με τον τρόπο που περιγράψαμε μόλις πριν, αποτελεί την απλούστερη εκδοχή ενός γενικότερου αποτελέσματος το οποίο στοιχειωδώς εκφράζουμε ως εξής: Η επαλληλία από ένα πολύ μεγάλο πλήθος χρονικά αρμονικών διαταραχών (ταλαντώσεων) οι οποίες μπορεί να έχουν διαφορετι-

κά πλάτη και αρχικές φάσεις, των οποίων όμως οι συχνότητες περιορίζονται σε μια σχετικά μικρή περιοχή $\Delta\omega$ (ζώνη συχνοτήτων) σε σχέση με τη μέση συχνότητά τους, μας δίνει σαν αποτέλεσμα μια διαταραχή (ταλάντωση) η οποία είναι 'σχεδόν αρμονική'. Η συχνότητα αυτής της ταλάντωσης $\overline{\omega}$, θα έχει μια τιμή που περιλαμβάνεται στο εσωτερικό της προαναφερόμενης ζώνης συχνοτήτων. Όμως ούτε το πλάτος ούτε η φάση της διαταραχής θα είναι σταθερά αλλά θα μεταβάλλονται χρονικά. Οι μεταβολές αυτές θα είναι πολύ μικρές, σε σχέση με την ταχύτατα μεταβαλλόμενη διαταραχή με συχνότητα $\overline{\omega}$.



(Σχ. 4.5.1.1)

Το πρώτο παράδειγμα σύνθεσης δύο ταλαντώσεων το επιλέγουμε από την περιοχή της Ακουστικής. Θα χρησιμοποιήσουμε σαν πηγές ακουστικών κυμάτων δύο ***διαπασών (tuning fork)***. Τα προαναφερόμενα είναι μεταλλικής κατασκευής αντικείμενα με μορφή διχαλωτή. Εδράζονται κατακόρυφα στο πάνω μέρος ξύλινων κουτιών με ανοικτά τα δύο τους άκρα που παίζουν το ρόλο των αντηχείων. Ένα χτύπημα στον ένα από τους κλάδους του διαπασών δονεί το σύστημα με συνέπεια να διαδίδεται στο χώρο ένα ακουστικό κύμα καθορισμένης συχνότητας. Επιλέγουμε σαν ανιχνευτή το αυτί μας και χρησιμοποιούμε δυο διαπασών που παράγουν δονήσεις με συχνότητες ν_1 και ν_2 αντίστοιχα. Τα τελευταία που ισαπέχουν από το αυ-

τί μας τα ενεργοποιούμε ταυτόχρονα και με την ίδια ισχύ πρόσκρουσης. Τότε μπορούμε να θεωρήσουμε ότι παράγονται δύο ξεχωριστά ακουστικά κύματα συχνοτήτων ν_1 και ν_2, που φθάνουν στο αυτί μας με το ίδιο πλάτος και με διαφορά φάσης μηδέν. Η διαφορά πίεσης μεταξύ του εξωτερικού και εσωτερικού μέρους του τυμπάνου στο αυτί μας, δημιουργεί τη δρώσα δύναμη που το αναγκάζει να δονηθεί και το ακουστικό ερέθισμα μεταφέρεται μέσω μιας ορισμένης διαδικασίας στο κατάλληλο τμήμα του εγκεφαλικού φλοιού προκειμένου να γίνει αντιληπτό (βλ. Κεφ. 1: Κύματα, ΠΑΡ/ΜΑ 2. Στοιχεία ακουστικής). Αποδεικνύεται πειραματικά ότι αν η διαφορά των συχνοτήτων $\nu_1 - \nu_2$ είναι μεγαλύτερη του 6% της μέσης τους τιμής $\bar{\nu}$ τότε αυτό που αντιλαμβανόμαστε είναι δύο διαφορετικές νότες με ελαφρά διαφορετικούς τόνους. Εάν όμως η διαφορά των συχνοτήτων είναι μικρότερη των10Hz, τότε η επαλληλία των δύο διαταραχών προκαλεί τέτοιο ερέθισμα ώστε αυτό που ακούμε θα είναι μια νότα συχνότητας $\bar{\nu} \cong (\nu_1 + \nu_2)/2$ της οποίας όμως το πλάτος μεταβάλλεται ελαφρά (διακροτήματα).

Η περίοδος μεταβολής του πλάτους της συνολικής ταλάντωσης, καθορίζεται όπως είδαμε από τη χρονική διάρκεια κατά την οποία η φάση της $\psi_m(t) = 2\psi_0 \cos\omega_m t$ μεταβάλλεται μεταξύ 0 και 2π. Οι τιμές που παίρνει κυμαίνονται μεταξύ: $0,\ -2\psi_0,\ 0,\ +2\psi_0,\ 0$. Εμείς όμως δεν αντιλαμβανόμαστε θετικές και αρνητικές τιμές του πλάτους $\psi_m(t)$, αλλά πότε το τελευταίο εκδηλώνεται σαν ισχυρό ή ασθενές άκουσμα. Αυτό συμβαίνει όταν έχει μέγιστο ή ελάχιστο όχι πλέον το πλάτος αλλά το τετράγωνο του δηλ. η συνάρτηση $\left[\psi_m(t)\right]^2$. Πράγματι όπως αποδεικνύει και η καθημερινή πείρα, η ακουστική μας αντίληψη (μέσω αυτιού - εγκεφάλου) στηρίζεται στην 'ανίχνευση' των σημάτων κατά το τετράγωνο του πλάτους τους. Κάτω από αυτές τις συνθήκες με τη βοήθεια της (σχ. 4.5.1.3) βρίσκουμε:

$$\psi_m(t)^2 = 4\psi_0^2 \cos^2 \omega_m t = 2\psi_0^2 (1 + \cos 2\omega_m t) \qquad (4.5.1.5)$$

Επομένως η $\psi_m(t)^2$ μεταβάλλεται σε σχέση με μια σταθερή τιμή υποβάθρου $\left(2\psi_0^2\right)$ με συχνότητα $\omega = 2\omega_m = \omega_1 - \omega_2$ δηλ. διπλάσια από αυτήν της συχνότητας διαμόρφωσης ω_m (βλ. Σχ. 4.5.1.1 δ). Άρα το άκουσμα μας θα περιλαμβάνει δύο μέγιστα (δύο διακροτήματα) μέσα σε μια περίοδο μεταβολής του πλάτους.

Διακροτήματα μεταξύ δύο πηγών που εκπέμπουν στην ορατή περιοχή του Η/Μ φάσματος παρατηρήθηκε για πρώτη φορά το 1955*. Σαν πηγές χρησιμοποιήθηκαν φασματικές λυχνίες Hg οι οποίες βρισκόταν κάτω από την επίδραση ισχυρού

*A.T. Forrester, R.A. Gudmundsen, and P.O. Johnson, "Photo-electric Mixing of Incoherent light" Phys. Rev. 99, 1691 (1955).

μαγνητικού πεδίου. Η γραμμή που χρησιμοποιήθηκε ήταν η πράσινη ($\bar{\nu} \cong 5.49 \times 10^{14}$ Hz, $\bar{\lambda} \cong 546.1\,\text{nm}$). Κάτω από αυτές τις συνθήκες η γραμμή διασπάται σε δύο (φαινόμενο Zeeman) και η διαφορά συχνοτήτων που επιτεύχθηκε ήταν $\nu_1 - \nu_2 \cong 10^{10}$ Hz. Οι δέσμες από τις δύο πηγές οδηγήθηκαν για επαλληλία στην επιφάνεια ενός φωτοηλεκτρικού ανιχνευτή (φωτοπολλαπλασιαστή) με κατάλληλη αποκρισιμότητα. Το αποτέλεσμα ήταν ο τελευταίος να δίνει περιοδική μεταβολή στην ένταση του ρεύματος εξόδου ίση με το διπλάσιο της συχνότητας διαμόρφωσης των δύο επί μέρους συχνοτήτων. Δηλ. η μεταβολή του ρεύματος συναρτήσει του χρόνου είχε τη μορφή της καμπύλης του (Σχ. 4.5.1.1δ).

Προηγουμένως μελετήσαμε κάτω από ορισμένες συνθήκες την επαλληλία χρονικά μεταβαλλόμενων διαταραχών και μέσω αυτής την ανάδειξη των διακροτημάτων. Πολύ μεγάλο ενδιαφέρον όμως παρουσιάζει η μελέτη της δημιουργίας διακροτημάτων από διαδιδόμενα κύματα δηλ. χωρο – χρονικά μεταβαλλόμενες διαταραχές. Το ζήτημα αυτό αφορά άμεσα τον τρόπο διάδοσης των πληροφοριών και οι αναφορές μας θα γίνουν ως επί το πλείστον στην περιοχή των Η/Μ κυμάτων. Γενικά ένα αρμονικής μορφής κύμα (ορισμένης συχνότητας) δεν είναι δυνατόν να θεωρηθεί ότι μπορεί να μεταφέρει κάποιο είδος πληροφορίες. Ουσιαστικά, υφίσταται στον χωρόχρονο με χαρακτηριστικά διαταραχής απείρου μήκους και άπειρης διάρκειας. Μόνο η ύπαρξη μιας οποιασδήποτε ανωμαλίας στη μορφολογία του μπορεί να συστήσει πληροφορία (σήμα). Συνήθεις τρόποι επέμβασης σε μια αρμονική διαδιδόμενη διαταραχή με πρόθεση τη διάδοση σήματος είναι η διαμόρφωση της κατά πλάτος, φάση, πόλωση, ένταση κλπ. Σε οποιαδήποτε όμως από αυτές τις περιπτώσεις, η γενεσιουργός αιτία που θα αναδείξει το σήμα δεν μπορεί να συσταθεί από μια αρμονική αλλά από την επαλληλία ενός συνόλου αρμονικών διαφορετικών συχνοτήτων, συνήθως περιορισμένων μέσα σε ορισμένα όρια.

4.5.2 *Επαλληλία δύο αρμονικών κυμάτων διαδιδόμενων σε μέσο με διαφορετική ταχύτητα φάσης. Ταχύτητα ομάδας*

Στα επόμενα θα μελετήσουμε την απλούστερη των περιπτώσεων δημιουργίας και διάδοσης μιας πληροφορίας (σήματος). Η τελευταία θ' αφορά την επαλληλία δύο διαδόμενων αρμονικών διαταραχών με παραπλήσιες συχνότητες. Θα δούμε ότι η αναδεικνυόμενη πληροφορία δεν είναι παρά ένα διαδιδόμενο χωρο-χρονικό διακρότημα, που κινείται με μια χαρακτηριστική ταχύτητα (είναι η λεγόμενη ταχύτητα ομάδας), η οποία σχετίζεται μεν αλλά δεν είναι η ίδια με καθεμιά από τις ταχύτητες φάσης των δύο συνιστωσών διαταραχών (ή αυτή της μέσης τους τιμής) και το μέτρο της είναι πάντα μικρότερο από αυτές.

Οι διαδιδόμενες διαταραχές μπορούμε να θεωρήσουμε ότι προέρχονται από δύο ανεξάρτητους ταλαντωτές, οι οποίοι δρουν στην αρχή του μέσου διάδοσης (δηλ. στο $z=0$) και των οποίων η χρονική μεταβολή δίνεται από τις (σχ. 4.5.1.1). Άρα έχουν σταθερό πλάτος ψ_0 και διαφορά φάσης μηδέν. Οπότε για $z=0$ η διαταραχή έχει τη μορφή:

$$\psi(0,t)=\psi_0\cos\omega_1 t+\psi_0\cos\omega_2 t \qquad (4.5.2.1)$$

Δεχόμενοι την αρχή της επαλληλίας για τις διαδιδόμενες διαταραχές, η συνισταμένη τους σε χρόνο t και απόσταση z από τις πηγές θα είναι:

$$\psi(z,t)=\psi_0\cos(\omega_1 t-k_1 z)+\psi_0\cos(\omega_2 t-k_2 z) \qquad (4.5.2.2)$$

όπου $k_1=2\pi/\lambda_1$ και $k_2=2\pi/\lambda_2$ οι κυματάριθμοι. Η ταχύτητα φάσης της πρώτης θα είναι ω_1/k_1 και της δεύτερης ω_2/k_2 . Εκτελώντας τις πράξεις στη (σχ. 4.5.2.2) θα έχουμε:

$$\psi(z,t)=\psi_m(z,t)\cos(\bar{\omega}t-\bar{k}z) \qquad (4.5.2.3)$$

όπου $$\psi_m(z,t)=2\psi_0\cos(\omega_m t-k_m z) \qquad (4.5.2.4)$$

με $$\bar{\omega}=(\omega_1+\omega_2)/2 \quad \bar{k}=(k_1+k_2)/2 \qquad (4.5.2.5)$$

και $$\omega_m=(\omega_1-\omega_2)/2 \quad k_m=(k_1-k_2)/2 \qquad (4.5.2.6)$$

Από τις (σχ. 4.5.2.3,4) διαπιστώνουμε ότι η συνολική διαταραχή συνίσταται από μια αρμονική διαταραχή με χρονική συχνότητα $\bar{\omega}$ και χωρική $\bar{k}$ της οποίας όμως το πλάτος δεν είναι σταθερό αλλά μεταβάλλεται αρμονικά στο χώρο-χρόνο με $\omega=\omega_m$ και $k=k_m$. Αποτελεί δηλ. η $\psi_m(z,t)$ ένα παράγοντα διαμόρφωσης της $\cos(\bar{\omega}t-\bar{k}z)$. Άρα η συνολική διαταραχή συνίσταται από οδεύοντα διακροτήματα, χρονικά μεταβαλλόμενα για $z=0$ ή $z=$σταθ. και χωρικά για $t=0$ ή $t=$σταθ.

Κάτω από αυτές τις συνθήκες προκύπτει το πολύ ενδιαφέρον ερώτημα για το ποιά ακριβώς θα είναι η ταχύτητα διάδοσης των διακροτημάτων δηλ. η 'ταχύτητα φάσης' ενός π.χ. σημείου της συνάρτησης που περιγράφει το πλάτος .Η ταχύτητα αυτή δηλ. η $(dz/dt)_g$ αφορά τα σημεία για τα οποία η φάση $\omega_m t-k_m z$ παραμένει σταθερή. Άρα από τη σχέση: $\omega_m t-k_m z=$σταθ. $\Rightarrow$ $\omega_m dt-k_m dz=0$

Οπότε $$\upsilon_g = \left(\frac{dz}{dt}\right)_g = \frac{\omega_m}{k_m} = \frac{\omega_1 - \omega_2}{k_1 - k_2} \quad \text{και στο όριο} \quad \Rightarrow \quad \upsilon_g = \frac{d\omega}{dk} \qquad (4.5.2.7)$$

Την ταχύτητα υ_g με την οποία διαδίδονται τα διακροτήματα, την ονομάζουμε ***ταχύτητα ομάδας (group velocity)***.

Στο (Σχ. 4.5.2.1) παρουσιάζεται η γραφική παράσταση της (σχ.4.5.2.3) συναρτήσει του z για διάφορες τιμές του t. Δηλ. βλέπουμε τα διαδοχικά στιγμιότυπα του διαδιδόμενου κύματος σ' ένα μέσο που είναι η επαλληλία δύο αρμονικών κυμάτων των οποίων :

$$\upsilon_g = (11/15)\upsilon_p \quad , \quad \overline{\omega} = 15\omega_m \quad \text{και} \quad \overline{k} = 11k_m$$

Στο (Σχ. 4.5.2.1) για $t = 0$ επιλέγουμε ένα σημείο που αντιστοιχεί σε σημείο μεγίστου πλάτους ενός διακροτήματος (κύκλος) και ταυτόχρονα το μέγιστο της διαταραχής με συχνότητα ίση με $\overline{\omega}$ (τελεία). Με την πάροδο του χρόνου (διαδοχικά στιγμιότυπα) βλέπουμε σαφώς ότι η ταχύτητα με την οποία κινείται το τελευταίο (δηλ. η τελεία) και που αντιστοιχεί κατά κάποιο τρόπο στην ταχύτητα φάσης $\upsilon_p = \overline{\omega}/\overline{k}$, είναι σαφώς μεγαλύτερη από την ταχύτητα με την οποία κινείται το σημείο το οποίο αντιστοιχεί στο επιλεγμένο μέγιστο του διακροτήματος (κύκλος) και με τη βοήθεια του οποίου ελέγχουμε το μέτρο της ταχύτητας ομάδας $\upsilon_g = \omega_m / k_m$.

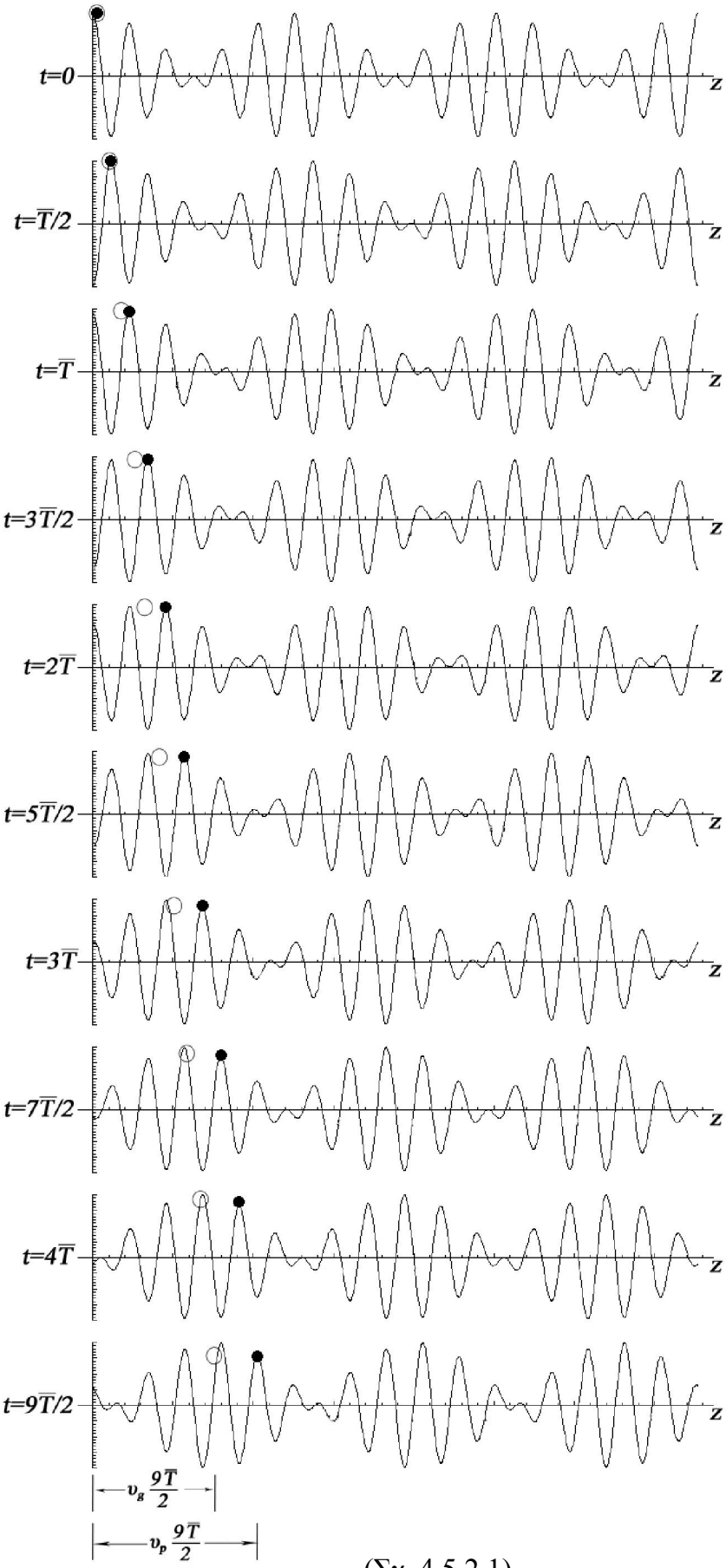
Παράδειγμα

Να βρεθεί η σχέση που συνδέει την ταχύτητα ομάδας υ_g με το μέγεθος του 'διασκεδασμού' $dn/d\omega$, σ' ένα οπτικό μέσο που εμφανίζει διασκεδασμό.

- Κατά τα γνωστά: $k = \dfrac{\omega}{\upsilon} = \dfrac{\omega}{(c/n)} = \dfrac{\omega n}{c}$. Επομένως: $\upsilon_g = \dfrac{d\omega}{dk} = \dfrac{d\omega}{d(\omega n/c)} =$

$$= \frac{d\omega}{(1/c)\,d(\omega n)} = \frac{c\,d\omega}{\omega dn + n d\omega} \quad \Rightarrow \quad \upsilon_g = \frac{c}{n + \omega \dfrac{dn}{d\omega}}$$

4.5.3 *Ταχύτητα φάσης, ταχύτητα ομάδας και η σχέση τους με την ταχύτητα του φωτός, για ένα υλικό που παρουσιάζει διασκεδασμό*


t=0
t=T/2
t=T
t=3T/2
t=2T
t=5T/2
t=3T
t=7T/2
t=4T
t=9T/2
z
$v_g \frac{9T}{2}$
$v_p \frac{9T}{2}$

(Σχ. 4.5.2.1)

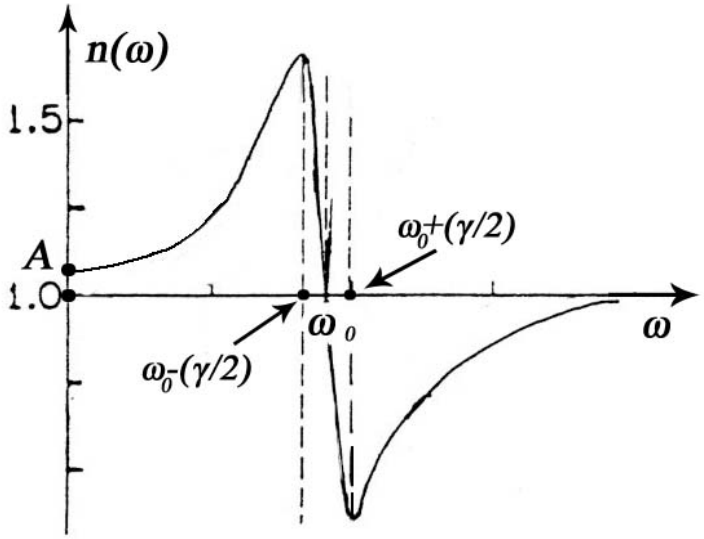
Θα θεωρήσουμε ένα οπτικό μέσο που ο δείκτης διάθλασής του συναρτήσει του ω δίνεται από τη (σχ. 1.12) του (ΠΑΡ/ΜΑΤΟΣ 1):

$$n(\omega) = 1 + \frac{Nq_e^2}{2\varepsilon_0 m_e}\left[\frac{\omega_0^2 - \omega^2}{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + \gamma^2\omega^2}\right] \qquad (4.5.3.1)$$

Η συνάρτηση αυτή είναι της μορφής που φαίνεται στο (Σχ. 4.5.3.1). Στα επόμενα θα προσπαθήσουμε να διευκρινίσουμε προκειμένου για τη διάδοση του φωτός στο υλικό αυτό : Α) Τη σχέση μεταξύ της ταχύτητας φάσης υ με την ταχύτητα του φωτός c, για τις δύο περιπτώσεις: α) $\omega < \omega_0$ και β) $\omega > \omega_0$. Όπου ω_0 η συχνότητα συντονισμού. Β) Τη σχέση μεταξύ της ταχύτητας ομάδας υ_g με την ταχύτητα του φωτός c, για τις δύο περιπτώσεις: α) $\omega \ll \omega_0$ και β) $\omega \gg \omega_0$. Όπου ω_0 η συχνότητα συντονισμού.

Α) Σχέση μεταξύ υ και c

α) Για $\omega < \omega_0$ από τη (σχ. 4.5.3.1) θα έχουμε: $n > 1$. Και επειδή: $n = c/\upsilon$ τότε: $\upsilon < c$.



(Σχ. 4.5.3.1)

β) Για $\omega > \omega_0$ από την ίδια όπως και προηγούμενα σχέση θα έχουμε: $n < 1$. Οπότε: $\upsilon > c$. Δεδομένου όμως ότι υ είναι η ταχύτητα φάσης του κύματος, η οποία κατά

τα γνωστά δεν αποτελεί φορέα πληροφορίας, δεν θα υφίσταται καμιά αντίθεση σε σχέση με την ειδική θεωρία της σχετικότητας.

Β) Σχέση μεταξύ υ_g και c

Στην προκειμένη περίπτωση θα πρέπει κατ' αρχή ν' αποδείξουμε ότι για τις δύο περιπτώσεις: $\omega < \omega_0$ καθώς και $\omega > \omega_0$ ισχύει πάντοτε: $\upsilon_g < \upsilon$. Για το σκοπό αυτό χρησιμοποιούμε τη σχέση:

$$\upsilon_g = \frac{c}{n + \omega\left(dn/d\omega\right)} \tag{4.5.3.2}$$

που αποδείξαμε στο προηγούμενο παράδειγμα, καθώς και την γραφική παράσταση του (Σχ. 4.5.3.1). Από το σχήμα αυτό μπορούμε να δούμε ότι έξω από την περιοχή συντονισμού δηλ. εκτός της περιοχής: $\omega_0 - \left(\gamma/2\right) < \omega < \omega_0 + \left(\gamma/2\right)$ θα έχουμε: $dn/d\omega > 0$. Οπότε: για $\omega \ll \omega_0$ και για $\omega \gg \omega_0$: $\upsilon_g = \dfrac{c}{n + \omega\left(dn/d\omega\right)} < \dfrac{c}{n} = \upsilon$. Άρα και $\upsilon_g < \upsilon$.

α) Για $\omega \ll \omega_0$, όπως ήδη έχουμε αποδείξει μέσω της (σχ. 4.5.3.1) : $n > 1$ και μέσω τις (σχ. 4.5.3.2): $\upsilon_g < \upsilon$.

β) Όμως για $\omega \gg \omega_0$, παρά το ότι μέσω της (σχ. 4.5.3.2) αποδείξαμε ότι $\upsilon_g < \upsilon$ επειδή μέσω τις (σχ. 4.5.3.1): $n < 1$, θα είναι: $\upsilon > c$ οπότε απαιτείται ιδιαίτερη διευκρίνιση. Πράγματι επειδή $\omega \gg \omega_0$ από τη (σχ. 4.5.3.1) θα έχουμε:

$$n(\omega) = 1 + \frac{Nq_e^2}{2\varepsilon_0 m_e}\left[\frac{\omega_0^2 - \omega^2}{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + \gamma^2\omega^2}\right] \simeq 1 - \frac{Nq_e^2}{2\varepsilon_0 m_e}\frac{\left(-\omega^2\right)}{\omega^4 + \gamma^2\omega^2} \quad \text{και επειδή: } \gamma \ll \ \Rightarrow$$

$$n(\omega) \simeq 1 - \frac{Nq_e^2}{2\varepsilon_0 m_e}\frac{1}{\omega^2} \tag{4.5.3.3}$$

Και παραγωγίζοντας την τελευταία ως προς ω θα έχουμε:

$$\frac{dn}{d\omega} = \frac{Nq_e^2}{\varepsilon_0 m_e}\frac{1}{\omega^3} \tag{4.5.3.4}$$

Τότε από τις (σχ. 4.5.3.2,4) θα έχουμε:

$$\upsilon_g = \frac{c}{n+\omega\dfrac{dn}{d\omega}} = \frac{c}{n+\omega\left(\dfrac{Nq_e^2}{\varepsilon_0 m_e}\dfrac{1}{\omega^3}\right)} = \frac{c}{n+\dfrac{Nq_e^2}{\varepsilon_0 m_e}\dfrac{1}{\omega^2}}$$ και επειδή από τη (σχ. 4.5.3.3):

$$n \simeq 1-\frac{Nq_e^2}{2\varepsilon_0 m_e}\frac{1}{\omega^2} \Rightarrow \upsilon_g = \frac{c}{1-\dfrac{Nq_e^2}{2\varepsilon_0 m_e}\dfrac{1}{\omega^2}+\dfrac{Nq_e^2}{\varepsilon_0 m_e}\dfrac{1}{\omega^2}} = \frac{c}{1+\dfrac{Nq_e^2}{2\varepsilon_0 m_e}\dfrac{1}{\omega^2}}.$$

Αλλά: $\dfrac{Nq_e^2}{2\varepsilon_0 m_e}\dfrac{1}{\omega^2} > 0$, άρα $\upsilon_g < c$ οπότε και για τους δύο κλάδους τις καμπύλης διασκεδασμού (εκτός της περιοχής συντονισμού) θα ισχύει η σχέση: $\upsilon_g < c$. Το συμπέρασμα αυτό είναι απαιτούμενο της ειδικής θεωρίας της σχετικότητας δεδομένου ότι είναι η ταχύτητα ομάδας υ_g είναι αυτή που αντιπροσωπεύει την ταχύτητα διάδοσης του σήματος (της πληροφορίας) και όχι η ταχύτητα φάσης υ.

Όμως στην περιοχή συντονισμού δηλ. για $\omega = \omega_0$ από τη (σχ. 4.5.3.1) θα έχουμε: $n \simeq 1$ δηλ. $\upsilon \simeq c$ ενώ η $dn/d\omega$ είναι αρνητική και παρουσιάζει απότομη κλίση όπως φαίνεται στο (Σχ. 4.5.3.1). Οπότε από τη (σχ. 4.5.3.2) επειδή $n \simeq 1$ και $dn/d\omega < 0$ θα έχουμε: $\upsilon_g > \upsilon$ το οποίο αντίκειται στην ειδική θεωρία της σχετικότητας. Το παράδοξο μπορεί να αρθεί, θεωρώντας ότι στην περιοχή αυτή ο διασκεδασμός είναι τόσο μεγάλος $(dn/d\omega \gg)$, έτσι που να μην είναι δυνατόν ν' αγνοήσουμε τη μεταβολή στη μορφή ενός διαδιδόμενου κυματοσυρμού (πληροφορίας). Δηλ. γενικά η παραμόρφωση είναι τόσο μεγάλη έτσι που η ταχύτητα ομάδας να μην μπορεί ν' αντιπροσωπεύσει την ταχύτητα διάδοσης του κυματοσυρμού. Η συμπεριφορά αυτή ονομάζεται ***ανώμαλος διασκεδασμός(anomalous dispersion)*** και συνδέεται άμεσα με τα γνωστά φαινόμενα απορρόφησης.

<u>Παράδειγμα</u>

Διαθέτουμε ένα διαφανές οπτικό μέσο του οποίου ο διασκεδασμός μπορεί να περιγραφεί από το γνωστό εμπειρικό τύπο του Cauchy (σχ. 4.3.1.2): $n = A + B/\lambda^2$ όπου A, B πειραματικά προσδιορίσιμες σταθερές και λ το μ.κ. του φωτός στο κενό. Αν για το υλικό αυτό $A = 1.4$ και $B = 2.5\times10^6\,(\text{Å})^2$, να υπολογιστούν η ταχύτητα φάσης υ_p και η ταχύτητα ομάδας υ_g στην περιοχή του μ.κ. $\lambda = 5000$ Å.

- Κατ' αρχή μας είναι γνωστές οι σχέσεις που εκφράζουν την ταχύτητα φάσης:

$$\upsilon_p = c/n \qquad (1)$$

όπου c η ταχύτητα του φωτός στο κενό και n ο δ.δ. του μέσου. Επίσης μια από τις εκφράσεις που καθορίζει την ταχύτητα ομάδας είναι η:

$$\upsilon_g = \upsilon_p - \lambda_m \frac{d\upsilon_p}{d\lambda_m} \tag{2}$$

όπου λ_m το μ.κ του φωτός στο μέσο διάδοσης.

α) ***Υπολογισμός της*** υ_p

Με αντικατάσταση των: $A = 1.4$, $B = 2.5 \times 10^6\,(\text{Å})^2$ και $\lambda = 5000$ Å στη σχέση $n = A + B/\lambda^2$ βρίσκουμε: $n = 1.5$. Και με αντικατάσταση του n στη (σχ. 1) θα έχουμε:

$$\upsilon_p = c/1.5 \tag{3}$$

β) ***Υπολογισμός της*** υ_g

Θα προσπαθήσουμε κατ' αρχή να εκφράσουμε το πηλίκο c/υ_g συναρτήσει γνωστών μεγεθών. Για το λόγο αυτό διαιρούμε τα μέλη της (σχ. 2) με το c και κατόπιν αντιστρέφουμε. Τότε θα έχουμε:

$$\frac{c}{\upsilon_g} = \frac{c}{\upsilon_p - \lambda_m \dfrac{d\upsilon_p}{d\lambda_m}} = \frac{1}{\dfrac{\upsilon_p}{c} - \dfrac{\lambda_m}{c}\dfrac{d\upsilon_p}{d\lambda_m}} \tag{4}$$

Αλλά $n = c/\upsilon_p$ και από θεμελιώδη σχέση της κυματικής $c = \lambda\nu$ και $\upsilon_p = \lambda_m \nu$. Όπου ν η συχνότητα του διαδιδόμενου φωτός μ.κ. λ στο κενό και λ_m στο μέσο δ.δ. n. Και από τις τρεις τελευταίες σχέσεις θα έχουμε: $\lambda_m/\lambda = 1/n$. Με την αντικατάσταση ης τελευταίας σχέσης και της $n = c/\upsilon_p$ στη (σχ. 4) θα έχουμε:

$$\frac{c}{\upsilon_g} = \frac{1}{\dfrac{1}{n} - \dfrac{\lambda}{nc}\dfrac{d\upsilon_p}{d\lambda_m}} \tag{5}$$

Όμως επειδή: $d\upsilon_p = d\left(\dfrac{c}{n}\right) = cd\left(\dfrac{1}{n}\right) = -\dfrac{c}{n^2}dn$ και $d\left(\dfrac{\lambda}{n}\right) = \dfrac{d\lambda}{n} - \dfrac{\lambda dn}{n^2}$ από την (σχ. 5):

$$\frac{c}{\upsilon_g}=\frac{1}{\frac{1}{n}-\frac{\lambda}{nc}\frac{d\upsilon_p}{d\lambda_m}}=\frac{1}{\frac{1}{n}-\frac{\lambda}{n}\frac{d\left(\frac{1}{n}\right)}{d\left(\frac{\lambda}{n}\right)}}=\frac{n}{1-\lambda\frac{\left(-\frac{1}{n^2}dn\right)}{\left(\frac{d\lambda}{n}-\frac{\lambda dn}{n^2}\right)}}=\frac{n^2}{d\lambda}\left(\frac{d\lambda}{n}-\lambda\frac{dn}{n^2}\right)$$. Και τελικά:

$$\frac{c}{\upsilon_g}=n-\lambda\frac{dn}{d\lambda} \tag{6}$$

Κατόπιν παραγωγίζοντας τη σχέση του διασκεδασμού $n=A+B/\lambda^2$ ως προς λ θα έχουμε: $\frac{dn}{d\lambda}=\frac{d}{d\lambda}\left(A+\frac{B}{\lambda^2}\right)=-\frac{2B}{\lambda^3}$. Και με την αντικατάστασή της στη (σχ. 6) βρίσκουμε τελικά:

$$\frac{c}{\upsilon_g}=n+\frac{2B}{\lambda^2} \tag{7}$$

Τότε από τη (σχ. 7) για $n=1.5$, $\lambda=5000\,\text{Å}$ και $B=2.5\times10^6\,(\text{Å})^2$ θα έχουμε: $c/\upsilon_g=1.7$. Επομένως τελικά:

$$\upsilon_g=\frac{c}{1.7} \tag{8}$$

Είναι εμφανές από τις (σχ. 3,7) ότι: $\upsilon_g<\upsilon_p$.

4.6 *Ανάδειξη φαινομένων που σχετίζονται με το διασκεδασμό του φωτός*

Σίγουρα είναι εντυπωσιακό το θέαμα του συνόλου των χρωμάτων που αναδύονται, όταν κοιτάζουμε έναν πολυέλαιο ή μια άλλη διακοσμητική σύνθεση που αποτελείται από κομμάτια διαφανούς γυαλιού που οι επιφάνειές τους είναι πολυπρισματικές (Εικ. 4.6.1). Η εμπειρία είναι κοινή σε όλους σχεδόν και οδηγεί με βεβαιότητα στο συμπέρασμα ότι το φως του ηλίου ή των άλλων συνήθων πηγών που πέφτει επάνω του, συνιστά σύνθεση πολλών 'χρωμάτων'. Η ανάλυση δηλ. αυτού

(Εικ. 4.6.1)

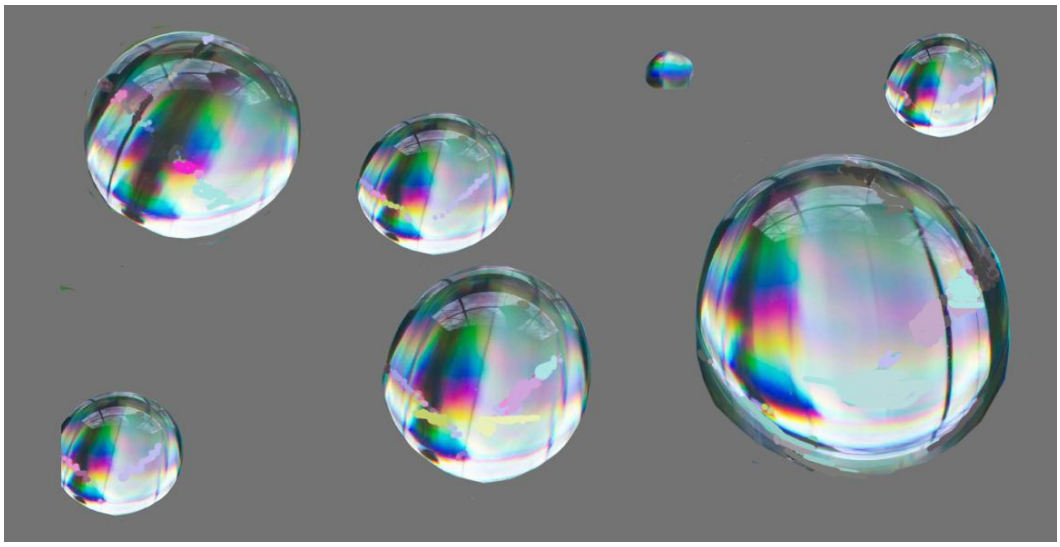
του φωτός μέσω των πολυπρισματικών επιφανειών αναδεικνύει τις συνιστώσες του, που με τη βοήθεια του ματιού μας μεταφράζεται σ' αυτά που ονομάζονται χρώματα της ίριδας (βλ. § 4.3.2). Τέτοιου είδους φαινόμενα είναι δυνατόν επίσης να παρατηρηθούν 'σε κίνηση', σ' ένα σχετικά ρηχό πυθμένα μιας πισίνας (ή της θάλασσας) όταν ο κυματισμός στην επιφάνειά του είναι σχετικά αργός (Εικ. 4.6.2). Με τον ίδιο τρόπο και οι δροσοσταλίδες μπορούν ν' αναλύσουν το φως (Εικ. 4.6.3).

Το γεγονός δηλ. της ανάλυσης, συνδέεται άμεσα με την πρόσπτωση του φωτός σε πρισματικές ή σχεδόν πρισματικές επιφάνειες τις οποίες σχηματίζουν διαφανή υλικά (όπως το γυαλί και το νερό στα προηγούμενα παραδείγματά μας). Η βάση της ερμηνείας της ανάλυσης του φωτός – κατά τα γνωστά – σχετίζεται με το φαινό-

μενο του διασκεδασμού. Δηλ. την εξάρτηση του δ.δ. των διαφόρων υλικών από το μ.κ. των διαδιδόμενων σ' αυτά ακτινοβολιών (βλ. § 4.3.2).

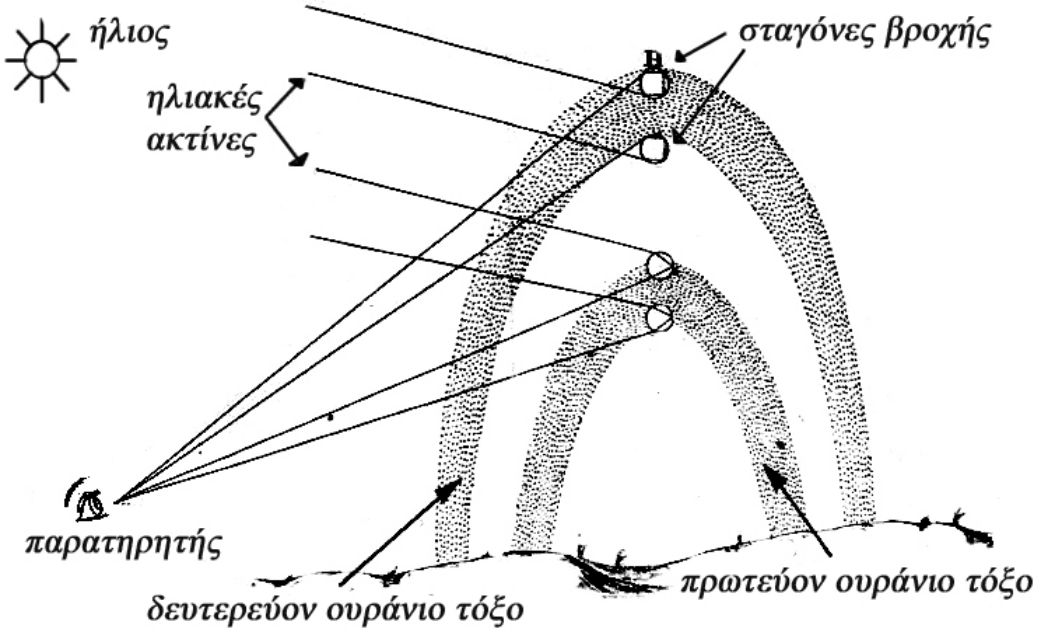
(Εικ. 4.6.2)

Στην ανάλυση του φωτός οφείλεται και η δημιουργία του θεαματικού φαινόμενου του ***ουρανίου τόξου(rainbow)***. Για έναν παρατηρητή που έχει πίσω του τον Ήλιο και μπροστά του εκτείνεται μια περιοχή με ευρύ ορίζοντα και στην οποία



(Εικ. 4.6.3)

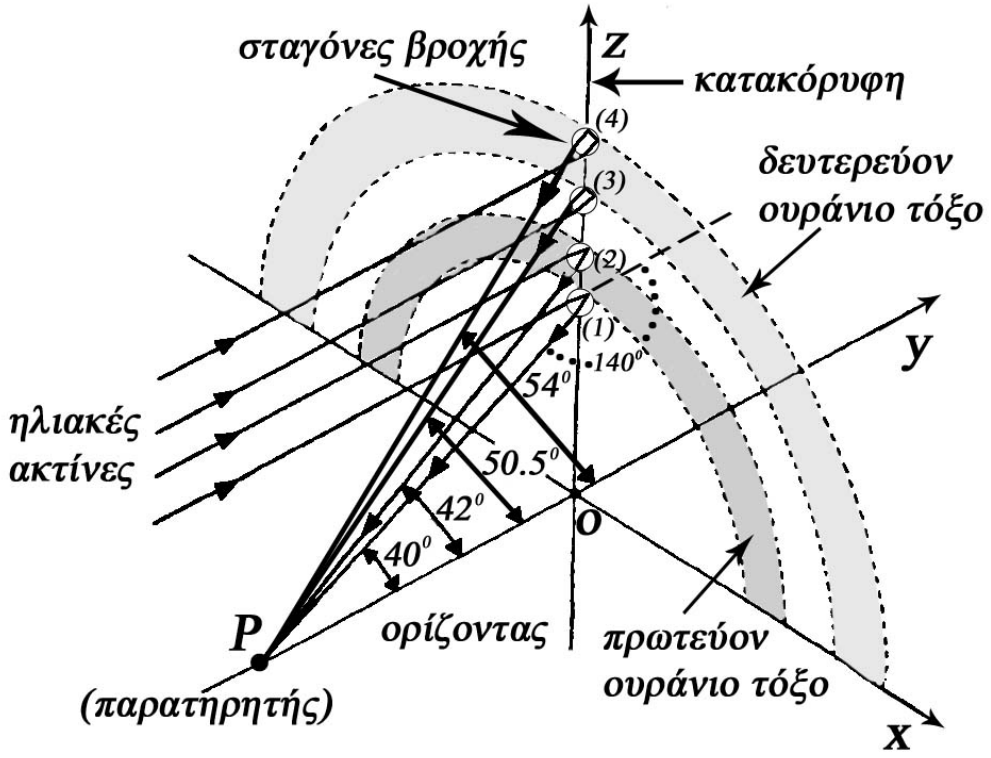
μόλις έχει βρέξει (Σχ. 6.3.4), εμφανίζονται συνήθως δύο σαφώς διαχωρισμένα σχεδόν ημικυκλικά πολύχρωμα τόξα, που τα άκρα τους αγγίζουν τον ορίζοντα. Τα τόξα αποτελούνται από διαδοχικές ζώνες χρωμάτων με σαφή χρωματική ακολουθία. Τα εσωτερικά όρια του ***πρωτεύοντος*** τόξου είναι ιώδη και τα εξωτερικά κόκκινα (Εικ. 6.3.7). Το ***δευτερεύον*** ουράνιο τόξο βρίσκεται σε μια ορισμένη απόσταση από το πρωτεύον και το περιβάλλει. Είναι πιο ασθενές σε ένταση και η αλληλουχία των χρωμάτων του αντίθετη του πρώτου. Δηλ. τα εσωτερικά όρια του δευτερεύοντος τόξου είναι κόκκινα και τα εξωτερικά ιώδη.



(Σχ. 4.6.4)

Πρόκειται για σύνθετο φαινόμενο και οφείλεται στη διάθλαση, την ολική ανάκλαση και την ανάλυση του ηλιακού φωτός από τις σταγόνες της βροχής που υπάρχουν στον ενδιάμεσο χώρο μεταξύ παρατηρητή και της φαινόμενης θέσης των τόξων. Οι μηχανισμοί παραγωγής των δύο ουράνιων τόξων, σχετίζονται άμεσα με την πορεία του φωτός στο εσωτερικό των σταγόνων της βροχής μετά την πρόσπτωσή του σ' αυτές. Θεωρούμε τις σταγόνες σφαιρικής μορφής και τις προσπίπτουσες ακτίνες φωτός παράλληλες (στην πραγματικότητα έχουμε προσπίπτοντα επίπεδα μέτωπα κύματος). Ο υπολογισμός της ακριβούς πορείας των ακτίνων στο εσωτερικό της σταγόνας είναι αρκετά περίπλοκος. Ο γνωστός Γάλλος επιστήμονας Descartes, υπολόγισε την πορεία αρκετών χιλιάδων ακτίνων για πρόσπτωση σε διαφορετικά σημεία της επιφάνειας της σταγόνας. Το συμπέρασμά του ήταν το εξής: Αν μια ακτίνα 'οποιουδήποτε χρώματος' προσέπιπτε με τέτοιο τρόπο σ' ένα σημείο της επιφάνειας της σταγόνας ώστε η εκτροπή της να είναι μέγιστη, τότε και οποια-

δήποτε άλλη ακτίνα 'του ίδιου χρώματος' που προσέπιπτε στην περιοχή γύρο από την πρώτη, η τελική της εκτροπή κατά την έξοδό της από τη σταγόνα, θα ήταν περίπου η ίδια με αυτή της πρώτης. Προκειμένου τώρα να μελετήσουμε στοιχειωδώς τον τρόπο εκτροπής και ανάλυσης του φωτός από τις σταγόνες και το συνολικό οπτικό αποτέλεσμα που μας δίνουν, θα θεωρήσουμε στο χώρο ένα τρισορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων x, y, z (Σχ. 4.6.5). Το επίπεδο x, y καταλαμβάνει τον ορί-

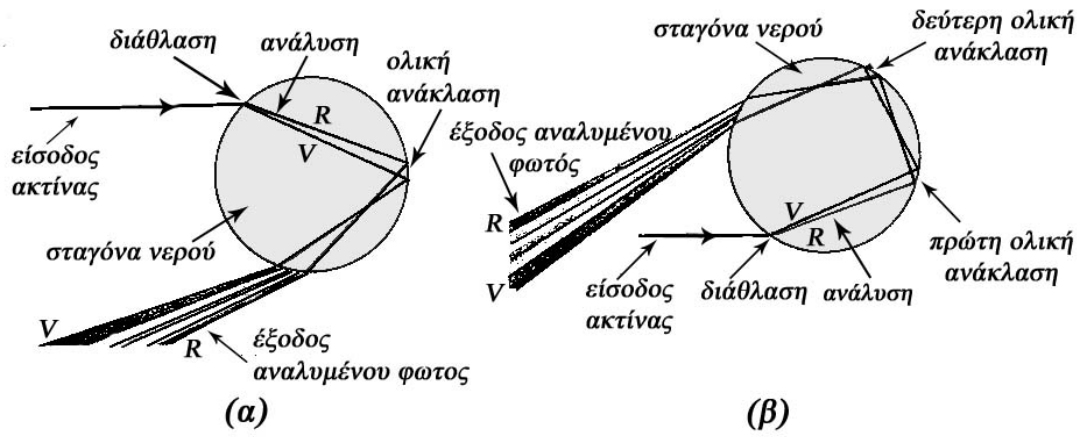


(Σχ. 4.6.5)

ζοντα ενώ ο άξονας z είναι κάθετος σ' αυτό στο σημείο O. Στη θέση P βρίσκεται ένας παρατηρητής και ο ενδιάμεσος χώρος μεταξύ αυτού και του επιπέδου x, z υφίσταται ο καταιονισμός των σταγονιδίων της βροχής. Θα θεωρήσουμε κατ' αρχή ηλιακές ακτίνες που οδεύουν παράλληλα με τον άξονα y και βρίσκονται πάνω στο επίπεδο y, z προσπίπτοντας στις σταγόνες. Η θεωρία και το πείραμα αποδεικνύουν ότι ο μηχανισμός παραγωγής του πρωτεύοντος και του δευτερεύοντος τόξου οφείλονται αντίστοιχα σε δύο ειδών πορείες που θα μπορούσαν ν' ακολουθήσουν οι ακτίνες του φωτός προσπίπτουσες, διαθλώμενες, 'αναλυόμενες' λόγω διασκεδασμού, ανακλώμενες ολικά και εξερχόμενες από τις σταγόνες.

α) **Όσον αφορά το πρωτεύον τόξο**: Στην περίπτωση αυτή, μια ακτίνα ηλιακού φωτός (το οποίο θεωρείται λευκό), προσπίπτει (Σχ. 4.6.6α) σ' ένα σημείο της επιφάνειάς της. Κατόπιν διαθλάται στο εσωτερικό της σταγόνας αναλυόμενη λό-

γω του φαινόμενου του διασκεδασμού. Το σύνολο αυτών των ακτίνων προσπίπτοντας στην ενδοεπιφάνεια νερού – αέρα υφίστανται ολική ανάκλαση. Συνεχίζουν να διαδίδονται μέχρι που συναντούν για δεύτερη φορά την ενδοεπιφάνεια νερού – αέρα. Τότε διαθλώνται τελικά προς το εξωτερικό της σταγόνας με μορφή βεντάλι-



(Σχ. 4.6.6)

ας με πορεία προς τον παρατηρητή. Κατά τον Descartes, παράλληλες ακτίνες προς την αρχικά προσπίπτουσα στην γύρο περιοχή της, θα δώσουν το ίδιο σχετικά οπτικό αποτέλεσμα όσον αφορά την εκτροπή τους. Επομένως για τις οριακές 'κόκκινες' και 'ιώδεις' ακτίνες θα υφίσταται μια μέγιστη εκτροπή, που θα οριοθετείτε από την αρχικά προσπίπτουσα στη σταγόνα και την τελικά εξερχόμενη. Η μέγιστη γωνία εκτροπής για το ιώδες φως είναι 140^0 (Σχ. 4.6.5) και καταδεικνύεται για πρόσπτωση ηλιακής ακτίνας στη σταγόνα με αριθμό (1). Επομένως ο παρατηρητής στη θέση P θα δέχεται το ιώδες φως με γωνία $\theta_V = 180^0 - 140^0 = 40^0$ σε σχέση με τον άξονα y. Η μέγιστη γωνία εκτροπής για το κόκκινο φως είναι 138^0 (Σχ. 4.6.5) και καταδεικνύεται για πρόσπτωση ηλιακής ακτίνας στη σταγόνα με αριθμό (2). Επομένως ο παρατηρητής στη θέση P θα δέχεται το κόκκινο φως με γωνία $\theta_R = 180^0 - 138^0 = 42^0$ σε σχέση με τον άξονα y. Όλα τα υπόλοιπα χρώματα θα εκτρέπονται από τις σταγόνες σε ενδιάμεσες με τις προηγούμενες γωνίες. Τελικά στον αμφιβληστροειδή χιτώνα του παρατηρητή - μέσω του κρυσταλλώδη φακού - σχηματίζεται ένα είδωλο. Και επειδή το μάτι 'βλέπει' κατά την προέκταση των προσπιπτόντων σ' αυτό ακτίνων, οι ιώδης περιοχή καταλαμβάνει το εσωτερικό τμήμα του πρωτεύοντος τόξου (μικρότερη γωνία εκτροπής). Το δε εξωτερικό του τμήμα θα είναι κόκκινο (μεγαλύτερη εκτροπή). Η μεταξύ των δύο περιοχή θα καταλαμβάνεται από τα άλλα χρώματα της ίριδας.

β) **Όσον αφορά το δευτερεύον τόξο**: Στην περίπτωση αυτή, μια ακτίνα ηλιακού φωτός (το οποίο θεωρείται λευκό), προσπίπτει (Σχ. 4.6.6β) σ' ένα σημείο της επιφάνειάς της. Κατόπιν διαθλάται στο εσωτερικό της σταγόνας αναλυόμενη λόγω του φαινόμενου του διασκεδασμού. Στην περίπτωση αυτή όμως, στο εσωτερικό της σταγόνας – κατά την πορεία των ακτίνων – υφίστανται δύο εσωτερικές ολικές ανακλάσεις πριν την έξοδό τους από τη σταγόνα. Τότε όμως η μέγιστη γωνία

(Εικ. 4.6.7)

εκτροπής για το κόκκινο φως είναι 129.5^0 (Σχ. 4.6.5) και καταδεικνύεται για πρόσπτωση ηλιακής ακτίνας στη σταγόνα με αριθμό (3). Επομένως ο παρατηρητής στη θέση P θα δέχεται το κόκκινο φως με γωνία $\theta_R = 180^0 - 129.5^0 = 50.5^0$ σε σχέση με τον άξονα y. Η μέγιστη γωνία εκτροπής για το ιώδες φως είναι 126^0 (Σχ. 4.6.5) και καταδεικνύεται για πρόσπτωση ηλιακής ακτίνας στη σταγόνα με αριθμό (4). Επομένως ο παρατηρητής στη θέση P θα δέχεται το ιώδες φως με γωνία $\theta_V = 180^0 - 126^0 = 54^0$ σε σχέση με τον άξονα y. Όλα τα υπόλοιπα χρώματα θα εκτρέπονται από τις σταγόνες σε ενδιάμεσες με τις προηγούμενες γωνίες. Τελικά ο παρατηρητής – μέσω του μηχανισμού που περιγράψαμε προηγουμένως – θα βλέπει την κόκκινη περιοχή να καταλαμβάνει το εσωτερικό τμήμα του δευτερεύοντος τόξου (μικρότερη γωνία εκτροπής). Το εξωτερικό του τμήμα θα είναι ιώδες (μεγαλύτερη εκτροπή) και η μεταξύ των δύο περιοχή θα καταλαμβάνεται από τα άλλα χρώματα της ίριδας.

Η εμφάνιση της πλήρους σχεδόν ημικυκλικής συμμετρίας των δύο τόξων είναι προφανής (Εικ. 4.6.8), για την περίπτωση που στο χώρο μεταξύ παρατηρητή και ορίζοντα απ' άκρου εις άκρον υπάρχει επαρκής ποσότητα σταγονιδίων βροχής για να προκαλέσει το φαινόμενο. Αν σταγονίδια υφίστανται μόνο σε μια περιοχή

(Εικ. 4.6.8)

του χώρου, τότε βλέπουμε τμήματα των τόξων που ακολουθούν όμως τη συμμετρία του πλήρους ημικυκλικού τόξου (Εικ. 4.6.9). Ένας άλλος επίσης σημαντικός περιορισμός που τίθεται όσον αφορά τα τμήματα των τόξων που θα μπορούσαμε να δού-

(Εικ. 4.6.9)

με, είναι η θέση του ήλιου σε σχέση με τον ορίζοντα. Γίνεται εμφανές από το (Σχ. 4.6.5) ότι όσο ο ήλιος ανυψώνεται από τον ορίζοντα, τόσο και λιγότερο τμήμα των τόξων θα βλέπουμε (δηλ. τμήματα μικρότερα των ημικυκλίων) (Εικ. 4.6.10). Π.χ. όταν ο ήλιος υπερβεί το ύψος των 42^0, τότε ο παρατηρητής που βρίσκεται στο επί-

(Εικ. 4.6.10)

πεδο του ορίζοντα, δεν θα μπορεί να δει το πρωτεύον τόξο. Όμως αν ο τελευταίος ταξιδεύει με αεροπλάνο – και υφίστανται οι κατάλληλες συνθήκες – τότε λόγω 'απαλλαγής από τον ορίζοντα', θα μπορούσε να δει ουράνια τόξα πλήρους κυκλικής

(Εικ. 4.6.11)

συμμετρίας (Εικ. 4.6.11). Τέλος θα πρέπει ν' αναφέρουμε ότι τόξα μπορούν να εμφανιστούν όπου υφίσταται καταιονισμός σταγονιδίων νερού, όπως π.χ. σε καταρ-

(Εικ. 4.6.12)

ράκτες, κοντά σε παραθαλάσσιους βράχους που σκάνε τα κύματα ή ακόμα και κατά το πότισμα ενός κήπου (Εικ. 4.6.12).

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ 1

Μιγαδικός δείκτης διάθλασης και απορρόφηση του φωτός

Γνωρίζουμε (§ 4.2.1) (σχ. 4.2.1.1) ότι η διαφορική εξίσωση του διέπει τη μετατόπιση x του κέντρου βάρους του ηλεκτρονικού νέφους σε σχέση μ' αυτό του θετικού πυρήνα για τις περιπτώσεις που μεταξύ των ατόμων υφίσταται 'τριβή' είναι:

$$m_e \frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} + m_e\omega_0^2 x = q_e E_0 e^{i\omega t} \tag{1.1}$$

όπου $E = E_0 e^{i\omega t}$. Αν $x = x_0 e^{i\omega t}$ αποτελεί λύση της (σχ. 1.1) τότε με αντικατάσταση σ' αυτήν μπορούμε να εκφράσουμε αναλυτικά το πλάτος x_0 το οποίο θα δίνεται από τη σχέση:

$$x_0 = \frac{q_e E_0}{m_e(\omega_0^2 - \omega^2 + i\gamma\omega)} \quad \text{με} \quad \gamma = b/m_e \tag{1.2}$$

και το μέτρο της πόλωσης του διηλεκτρικού (σχ. 4.1. 2.7) από την:

$$P = \frac{q_e^2 N \cdot E(t)/m_e}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\gamma\omega} \tag{1.3}$$

Η αντικατάσταση της P στη (4.1.1.12) μας δίνει το δ.δ. $\tilde{n}$ ο οποίος στην περίπτωση αυτή είναι μιγαδικός αριθμός και δίνεται από τη σχέση:

$$\tilde{n}^2 = 1 + \frac{Nq_e^2}{\varepsilon_0 m_e}\left(\frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\gamma\omega}\right) \tag{1.4}$$

Η φυσική σημασία του μιγαδικού δ.δ. όπως θα δούμε, αφορά κατ' αρχή την άρση της ασυνέχειας του για $\omega=\omega_0$ και κατόπιν την ανάδειξη του φαινομένου της απορρόφησης της ενέργειας του προσπίπτοντος Η/Μ κύματος σ' αυτήν την περιοχή συχνοτήτων. Ο δ.δ. $\tilde{n}$ μπορεί να γραφεί ως εξής:

$$\tilde{n} = n - i\kappa = n(\omega) - i\kappa(\omega) \tag{1.5}$$

Όπου $n(\omega)$ και $\kappa(\omega)$ είναι πραγματικοί αριθμοί και ο $\kappa(\omega)$ ονομάζεται ***συντελεστής απόσβεσης(extinction coefficient)***.

Η γενικότερη μορφή του διαδιδόμενου κατά τη διεύθυνση z Η/Μ κύματος σ' ένα ομογενές και ισότροπο διηλεκτρικό μπορεί να γραφεί:

$$\tilde{E} = \tilde{E}_0 e^{i\left(\omega t - \tilde{k} z\right)} \tag{1.6}$$

Το πλάτος $\tilde{\mathbf{E}}_0$ θα είναι $\tilde{\mathbf{E}}_0 = \tilde{E}_{0x}\mathbf{i} + \tilde{E}_{0y}\mathbf{j}$. Αν $\tilde{E}_{0x} = A_x e^{i\varphi_x}$ και $\tilde{E}_{0y} = A_y e^{i\varphi_y}$ είναι τα δύο μιγαδικά πλάτη σε δύο κάθετες μεταξύ τους διευθύνσεις x, y με $\phi_y - \phi_x$ τη διαφορά φάσης μεταξύ τους, τότε αναδεικνύονται τα λεγόμενα ***φαινόμενα πόλωσης*** (βλ. Κεφ. 5: Πόλωση του φωτός).

Εδώ θα θεωρήσουμε το φως ότι είναι γραμμικά πολωμένο με το ηλεκτρικό του πεδίο να ταλαντεύεται παράλληλα με τη διεύθυνση της μετατόπισης x του κέντρου βάρους του ηλεκτρονικού νέφους. Τότε στη (σχ. 1.6) $\tilde{\mathbf{E}}_0 \equiv E_0 \in \boldsymbol{R}$. Επίσης επειδή $n = \lambda_0/\lambda = k/k_0$ με ανάλογο τρόπο:

$$\tilde{k} = \tilde{n} k_0 \tag{1.7}$$

Οπότε:

$$\tilde{k} = \left(n - i\kappa\right) k_0 = n k_0 - i\kappa k_0 \tag{1.8}$$

άρα το πραγματικό μέρος της (σχ. 1.6) θα έχει τη μορφή:

$$E = E_0 e^{\frac{-2\pi\kappa z}{\lambda_0}} cos\left(\omega t - \frac{2\pi n z}{\lambda_0}\right) \tag{1.9}$$

με $\left(2\pi/\lambda_0\right) nz = k_0 nz = kz$. Από τη (σχ. 1.9) βλέπουμε ότι ο συντελεστής κ αφορά την απορρόφηση του κύματος κατά τη διάδοση του στο οπτικό μέσο επειδή έπειτα από διαδρομή $\Delta z = \dfrac{\lambda_0}{2\pi\kappa}$ το πλάτος E γίνεται το $1/e$ του αρχικού E_0. Άρα ο παράγοντας $e^{-2\pi\kappa z/\lambda_0}$ της (σχ. 1.9) αναδεικνύει ***φαινόμενα απορρόφησης***.

Όσον αφορά το πραγματικό μέρος $n(\omega)$ του $\tilde{n}$ στον παράγοντα $\cos\left(\omega t - 2\pi n z/\lambda_0\right)$ μας αναδεικνύει το γνωστό ***φαινόμενο του διασκεδασμού*** δηλ. την εξάρτηση του δ.δ. n από τη συχνότητα ω.

Αν τώρα θεωρήσουμε ότι έχουμε ένα σχετικά αραιό αέριο διηλεκτρικό ο δείκτης διάθλασης δεν θα διαφέρει πολύ από την μονάδα οπότε:

$$\tilde{n}^2 - 1 = \left(\tilde{n} + 1\right)\left(\tilde{n} - 1\right) \simeq 2\left(\tilde{n} - 1\right) \tag{1.10}$$

Και με τη βοήθεια της (σχ. 1.4) θα έχουμε:

$$\left.\begin{aligned}\tilde{n} = n(\omega) - i\kappa(\omega) &= 1 + \frac{Nq_e^2}{2\varepsilon_0 m_e}\left(\frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\gamma\omega}\right) = \\ &= 1 + \frac{Nq_e^2}{2\varepsilon_0 m_e}\left[\frac{\omega_0^2 - \omega^2}{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + \gamma^2\omega^2}\right] - i\frac{Nq_e^2}{2\varepsilon_0 m_e}\left[\frac{\gamma\omega}{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + \gamma^2\omega^2}\right]\end{aligned}\right\} \tag{1.11}$$

Εξισώνοντας τώρα τα πραγματικά και τα φανταστικά μέρη από τη (σχ. 1.11) βρίσκουμε:

$$n(\omega) = 1 + \frac{Nq_e^2}{2\varepsilon_0 m_e}\left[\frac{\omega_0^2 - \omega^2}{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + \gamma^2\omega^2}\right] \tag{1.12}$$

$$\kappa(\omega) = \frac{Nq_e^2}{2\varepsilon_0 m_e}\left[\frac{\gamma\omega}{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + \gamma^2\omega^2}\right] \tag{1.13}$$

Για την περιοχή συντονισμού του παραπάνω αερίου όπου $|\omega - \omega_0| \ll \omega_0$ οι (σχ. 1.12,13), γράφονται:

α) Για τον $n(\omega)$ από τη (σχ. 1.12): $n(\omega) = 1 + \frac{Nq_e^2}{2\varepsilon_0 m_e}\frac{\omega_0^2 - \omega^2}{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + \gamma^2\omega^2} \rightarrow \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + \gamma^2\omega^2} =$

$$= \frac{(\omega_0 - \omega)(\omega_0 + \omega)}{(\omega_0 - \omega)^2(\omega_0 + \omega)^2 + \gamma^2\omega^2} = \{\omega_0 + \omega \simeq 2\omega_0\} = \frac{2(\omega_0 - \omega)\omega_0}{(\omega_0 - \omega)^2 4\omega_0^2 + \gamma^2\omega^2} =$$

$$= \frac{1}{\omega_0}\frac{2(\omega_0 - \omega)\omega_0^2}{(\omega_0 - \omega)^2 4\omega_0^2 + \gamma^2\omega^2} = \frac{1}{\omega_0}\frac{2(\omega_0 - \omega)}{4(\omega_0 - \omega)^2 + \gamma^2(\omega/\omega_0)^2} = \left\{\frac{\omega}{\omega_0} \simeq 1\right\} = \frac{1}{2\omega_0}\frac{4(\omega_0 - \omega)}{\left[4(\omega_0 - \omega)^2 + \gamma^2\right]} =$$

$$= \frac{1}{2\omega_0}\frac{4(\omega_0 - \omega)}{\left[4(\omega_0 - \omega)^2 + (4/4)\gamma^2\right]} = \frac{1}{2\omega_0}\frac{(\omega_0 - \omega)}{(\omega_0 - \omega)^2 + (\gamma/2)^2} \Rightarrow$$

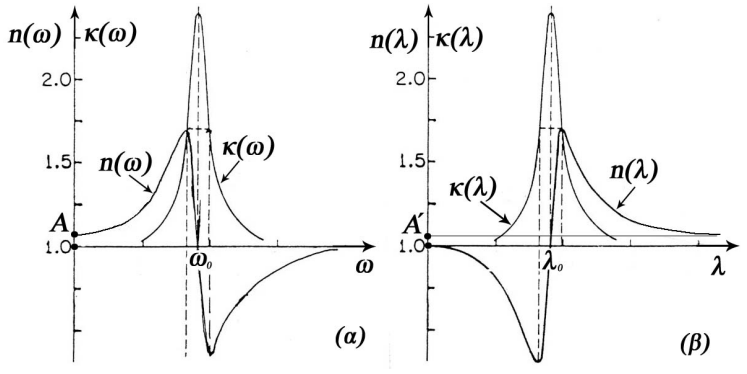
$$n(\omega) = 1 + \frac{Nq_e^2}{4\varepsilon_0 m_e \omega_0}\frac{\omega_0 - \omega}{(\omega_0 - \omega)^2 + (\gamma/2)^2} \tag{1.14}$$

β) Για τον $\kappa(\omega)$ από τη (σχ. 1.13) με $\omega_0 + \omega \simeq 2\omega_0$ και $\omega/\omega_0 \simeq 1$ θα έχουμε:

$$\kappa(\omega) = \frac{Nq_e^2}{2\varepsilon_0 m_e}\frac{\gamma\omega}{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + \gamma^2\omega^2} = \frac{Nq_e^2}{2\varepsilon_0 m_e}\frac{\gamma\omega_0}{4\omega_0^2(\omega_0 - \omega)^2 + \gamma^2\omega_0^2} = \frac{Nq_e^2}{2\varepsilon_0 m_e}\frac{\gamma}{4\omega_0(\omega_0 - \omega)^2 + \gamma^2\omega_0} \Rightarrow$$

$$\kappa(\omega)=\frac{Nq_e^2}{8\varepsilon_0 m_e\omega_0}\cdot\frac{\gamma}{\left(\omega-\omega_0\right)^2+\left(\gamma/2\right)^2} \tag{1.15}$$

Στο (Σχ. 1.1α) μπορούμε να δούμε τη γραφική παράσταση των $n(\omega)$ και $\kappa(\omega)$ όπως αυτές εκφράζονται από τις (σχ. 1.14,15) σε αυθαίρετες μονάδες. Στο (Σχ. 1.1β) φαίνεται η γραφική παράσταση των $n(\lambda)$ και $\kappa(\lambda)$ δηλ. του δ.δ. και του συντελεσ-



(Σχ. 1.1)

τή απόσβεσης συναρτήσει του μ.κ. λ. Μια περισσότερο λεπτομερής μελέτη αυτών των καμπύλων γίνεται στα επόμενα.

Ακραίες τιμές της συνάρτησης $n(\omega)$ **που δίνεται από τη (**σχ. 1.14).

Θα έχουμε: $n(\omega)=1+\dfrac{a\left(\omega_0-\omega\right)}{\left(\omega_0-\omega\right)^2+b}$, όπου $a=\dfrac{Nq_e^2}{4\varepsilon_0 m_e\omega_0}$ και $b=\left(\dfrac{\gamma}{2}\right)^2$.

$$\frac{dn}{d\omega}=\frac{-\alpha\left[\left(\omega_0-\omega\right)^2+b\right]-a\left(\omega_0-\omega\right)\left[-2\left(\omega_0-\omega\right)\right]}{\left[\left(\omega_0-\omega\right)^2+b\right]^2}=0 \quad\Rightarrow$$

$$\Rightarrow -a\left(\omega_0-\omega\right)^2-ab+2a\left(\omega_0-\omega\right)^2=0 \quad\Rightarrow\quad a\left(\omega_0-\omega\right)^2-ab=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left(\omega_0-\omega\right)^2=b \quad\Rightarrow\quad \omega_0-\omega=\pm\sqrt{b} \quad\Rightarrow\quad \omega=\omega_0\pm\gamma/2$$

α) Για $\omega=\omega_0-\dfrac{\gamma}{2}\Rightarrow n(\omega)=1+\dfrac{Nq_e^2}{4\varepsilon_0 m_e\omega_0\gamma}=n(\omega)_{\max}$

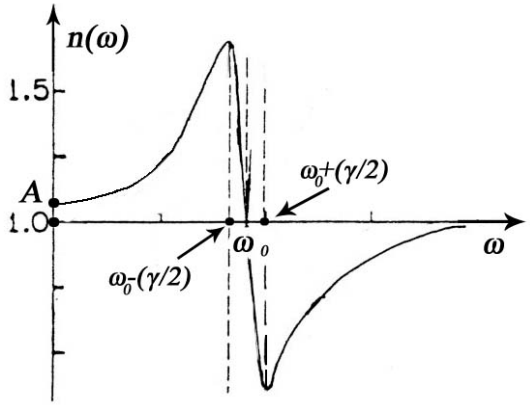
β) Για $\omega=\omega_0+\dfrac{\gamma}{2}\Rightarrow n(\omega)=1-\dfrac{Nq_e^2}{4\varepsilon_0 m_e\omega_0\gamma}=n(\omega)_{\min}$

Η μορφή της συνάρτησης $n(\omega)$ **που δίνεται από τη** (σχ. 1.14).

$$n(\omega)=1+\frac{Nq_e^2}{4\varepsilon_0 m_e\omega_0}\frac{\omega_0-\omega}{(\omega_0-\omega)^2+(\gamma/2)^2}=1+\frac{Nq_e^2}{4\varepsilon_0 m_e}\frac{1-\dfrac{\omega}{\omega_0}}{\omega_0^2\left(1-\dfrac{\omega}{\omega_0}\right)^2+\left(\dfrac{\gamma}{2}\right)^2}.$$

α) Για $\omega\to 0 \;\Rightarrow\; n(\omega)=1+\dfrac{Nq_e^2}{4\varepsilon_0 m_e}\dfrac{1}{\omega_0^2+(\gamma/2)^2}$ (Σημείο A του άξονα $n(\omega)$).

β) Για $\omega\to\omega_0-\dfrac{\gamma}{2} \;\Rightarrow\; n(\omega)=1+\dfrac{Nq_e^2}{4\varepsilon_0 m_e\gamma}=n(\omega)_{\max}$



(Σχ. 1.2)

γ) Για $\omega\to\omega_0 \;\Rightarrow\; n(\omega)=1$

δ) Για $\omega\to\omega_0+\dfrac{\gamma}{2} \;\Rightarrow\; n(\omega)=1-\dfrac{Nq_e^2}{4\varepsilon_0 m_e\gamma}=n(\omega)_{\min}$

ε) Για $\omega\to\infty \;\Rightarrow$

$$\frac{1-\dfrac{\omega}{\omega_0}}{\omega_0^2\left(1-\dfrac{\omega}{\omega_0}\right)^2+\left(\dfrac{\gamma}{2}\right)^2}=-\frac{\infty}{\infty}=\frac{\left(1-\dfrac{\omega}{\omega_0}\right)'_\omega}{\left[\omega_0^2\left(1-\dfrac{\omega}{\omega_0}\right)^2+\left(\dfrac{\gamma}{2}\right)^2\right]'_\omega}=\frac{-\dfrac{1}{\omega_0}}{2\omega_0^2\left(1-\dfrac{\omega}{\omega_0}\right)\left(1-\dfrac{\omega}{\omega_0}\right)'_\omega}=$$

$$=\frac{-\dfrac{1}{\omega_0}}{2\omega_0^2\left(1-\dfrac{\omega}{\omega_0}\right)\left(-\dfrac{1}{\omega_0}\right)}=\frac{1}{2\omega_0^2\left(1-\dfrac{\omega}{\omega_0}\right)_{\omega\to\infty}}=0 \;\Rightarrow\; n(\omega)=1$$

Μετατροπή της συνάρτησης $n(\omega)$ **στην** $n(\lambda)$

Επειδή: $\omega=2\pi\nu,\ \upsilon=\lambda\nu \Rightarrow \omega=2\pi\upsilon/\lambda$. Επίσης: $\omega_0=2\pi\nu_0,\ \upsilon=\lambda_0\nu_0 \Rightarrow \omega_0=2\pi\upsilon/\lambda_0$.

Και μετά από αντικατάσταση στη (σχ. 1.14) βρίσκουμε:

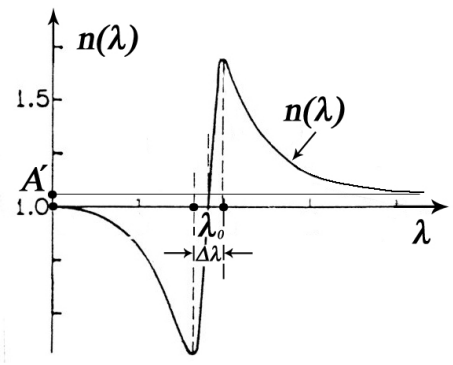
$$n(\lambda)=1+\frac{Nq_e^2}{4\varepsilon_0 m_e}\frac{1-\frac{\lambda_0}{\lambda}}{\omega_0^2\left(1-\frac{\lambda_0}{\lambda}\right)^2+\left(\frac{\gamma}{2}\right)^2} \tag{1.16}$$

Ακραίες τιμές της συνάρτησης $n(\lambda)$

Ακραίες τιμές έχουμε όταν: $\omega=\omega_0\pm\frac{\gamma}{2}\Rightarrow\frac{2\pi\upsilon}{\lambda}=\frac{2\pi\upsilon}{\lambda_0}\pm\frac{\gamma}{2}\Rightarrow\frac{\lambda_0}{\lambda}=1\pm\frac{\lambda_0\gamma}{4\pi\upsilon}$.

Και με την αντικατάστασή τους στη (σχ. 1.16) βρίσκουμε:

$n(\lambda)_{\min}=1-\frac{Nq_e^2\lambda_0}{8\pi\varepsilon_0 m_e\upsilon\gamma}$ και $n(\lambda)_{\max}=1+\frac{Nq_e^2\lambda_0}{8\pi\varepsilon_0 m_e\upsilon\gamma}$. Επίσης: $\Delta\lambda=\frac{8\pi\upsilon\gamma\lambda_0^2}{16\pi^2\upsilon^2-\gamma^2\lambda_0^2}$



(Σχ. 1.3)

Η μορφή της συνάρτησης $n(\lambda)$ **που δίνεται από τη** (σχ. 1.16).

α) Όταν $\lambda\to 0\ \Rightarrow\frac{1-\frac{\lambda_0}{\lambda}}{\omega_0^2\left(1-\frac{\lambda_0}{\lambda}\right)^2+\left(\frac{\gamma}{2}\right)^2}=\frac{-\infty}{-\infty}=\frac{\left[1-\frac{\lambda_0}{\lambda}\right]'_\lambda}{\left[\omega_0^2\left(1-\frac{\lambda_0}{\lambda}\right)^2+\left(\frac{\gamma}{2}\right)^2\right]'_\lambda}=-\frac{\frac{\lambda_0}{\lambda^2}}{\frac{2\omega_0^2\lambda_0}{\lambda^2}\left(1-\frac{\lambda_0}{\lambda}\right)}=\frac{1}{2\omega_0^2\left(1-\frac{\lambda_0}{\lambda}\right)_{\lambda\to 0}}=0$

Επομένως από τη (σχ. 1.16) τελικά, για $\lambda\to 0\ \Rightarrow\ n(\lambda)=1$.

β) Όταν $\lambda\to\lambda_0\ \Rightarrow\ n(\lambda)=1$.

γ) Όταν $\lambda\to\infty\ \Rightarrow\ n(\lambda)=1+\frac{Nq_e^2}{4\varepsilon_0 m_e}\frac{1}{(\gamma/2)^2}$ (Σημείο A' του άξονα $n(\lambda)$).

ΘΕΜΑ 1

Διάδοση κυματοσυρμού, σε οπτικό μέσο που εμφανίζει διασκεδασμό

α) *Οι κυματοσυρμοί και οι ιδιότητές τους. Χωρική φασματική ανάλυση*

Η κυματική διαταραχή που αντιστοιχεί σ' ένα επίπεδο μέτωπο κύματος διαδιδόμενο προς την $(+z)$ διεύθυνση, κατά τα γνωστά περιγράφεται στη μιγαδική της μορφή από τη σχέση:

$$\psi(z,t) = Ae^{i(\omega t - kz)} \tag{1.1}$$

όπου με $A = \text{σταθ.}$ παριστάνεται το πλάτος του κύματος με $\omega = 2\pi\nu$ η γωνιακή συχνότητα και $k = 2\pi/\lambda$ ο κυματάριθμος.

Στην πραγματικότητα όμως όπως είναι γραμμένη η (σχ. 1.1) παριστάνει ένα κύμα απείρου μήκους και άπειρης διάρκειας. Ειδικότερα για μια ορισμένη χρονική στιγμή (έστω την $t = 0$) θα έχουμε:

$$\psi(z,t=0) = Ae^{-ikz} \tag{1.2}$$

όπου: $-\infty < z < +\infty$. Δηλ. το στιγμιότυπο του κύματος θα εκτείνεται από $-\infty \to +\infty$. Όμως – όπως ήδη έχουμε αναφέρει – ένα τέτοιου είδους αρμονικό κύμα δεν μπορεί να συνιστά κανενός είδους πληροφορία. Και η μόνη περίπτωση που θα μπορούσε να συνιστά, θα ήταν μια οποιουδήποτε είδους 'διαταραχή' του προφίλ του. Δηλ. ένα είδος παραμόρφωσης τοπικά του πλάτους του, της φάσης του της κατάστασης πόλωσής του κ.λ.π. Για να περιγραφεί όμως μια τέτοιου είδους διαταραχή, θα πρέπει να εισαχθούν επιπλέον ***χωρικές συχνότητες(spatial frequencies)***. Δηλ. στιγμιότυπα (εφόσον έχουμε θέσει $t = 0$) με $k_i = (2\pi/\lambda_i) \neq 0$ $i = 1, 2, ..$ των οποίων πλέον η επαλληλία θα συγκροτεί τη διαταραχή δηλ. την πληροφορία (βλ. § 4.5.2 περί διακροτημάτων).

Στην πράξη βέβαια οι διαταραχές είναι πεπερασμένες χωρικά (και χρονικά) και συνιστούν αυτό που ονομάζουμε ***κυματοσυρμούς(wave trains)***. Μια στοιχειώδης ανάλυση των ιδιοτήτων των χρονικά όμως μεταβαλλόμενων κυματοσυρμών (δηλ. για $z = \text{σταθ.}$) γίνεται στο (Κεφ. 6: Συμβολή του φωτός) με τη βοήθεια της

ανάλυσης Fourier*. Ο μετασχηματισμός κατά Fourier των χρονικά μεταβαλλόμενων κυματοσυρμών (ανεξάρτητη μεταβλητή ο χρόνος t), προκειμένου να προσδιορίσουμε το συχνοτικό τους περιεχόμενο (δηλ. τα πλάτη των συνιστωσών τους συχνοτήτων $\omega_i = 2\pi\nu_i \;\; i = 1, 2, ...$) είναι μαθηματικά ισοδύναμος με τον μετασχηματισμό κατά Fourier των χωρικά μεταβαλλόμενων (αντίστοιχων) κυματοσυρμών (ανεξάρτητη μεταβλητή η απόσταση z), προκειμένου να προσδιορίσουμε το χωρικό συχνοτικό τους περιεχόμενο (δηλ. τα πλάτη των συνιστωσών τους χωρικών συχνοτήτων $k_i = \left(2\pi/\lambda_i\right) \;\; i = 1, 2, ...$). Οπότε αν με:

$$\psi\left(z, t = 0\right) = \int_{-\infty}^{\infty} A\left(k\right) e^{-ikz} dk \tag{1.3}$$

περιγράφουμε τον κυματοσυρμό σαν την επαλληλία αρμονικών διαταραχών (απείρου μήκους) πλάτους εκάστοτε $A\left(k\right)$, τότε τα $A\left(k\right)$ θα δίνονται από τη σχέση:

$$A\left(k\right) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \psi\left(z, t = 0\right) e^{ikz} dz \tag{1.4}$$

που συνιστά το μετασχηματισμό Fourier της $\psi\left(z, t = 0\right)$. Δηλ. οι συναρτήσεις:

$$\psi\left(z, t = 0\right) \;\leftrightarrow\; A\left(k\right) \tag{1.5}$$

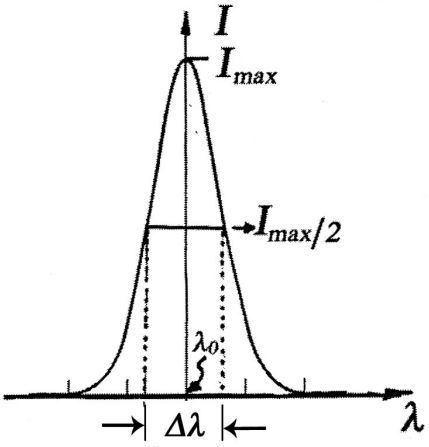
αποτελούν ζεύγος Fourier. Όπου κατά τα γνωστά η $\psi\left(z, t = 0\right)$ συνιστά τον αντίστροφο μετασχηματισμό Fourier της $A\left(k\right)$. Στη γενικότερη περίπτωση – όπως θα δούμε στα επόμενα παραδείγματα – η συνάρτηση $A\left(k\right)$ είναι πολύ στενής φασματικής (χωρικά) περιοχής (sharply peaked), γύρω από ένα κεντρικό κυματάριθμο με $k = k_0$.

β) *Αρμονικός κυματοσυρμός με περιβάλλουσα γκαουσιανής μορφής*

Η ανάλυση των πειραματικών δεδομένων του ενεργειακού φάσματος (κατανομή της έντασης) της ακτινοβολίας ψευδομονοχρωματικού φωτός (π.χ. μιας φασματικής γραμμής που εκπέμπετε από μια φασματική λυχνία), μας οδηγεί σε μια

* H. Hsu: 'Fourier Analysis' Simon and Schuster (Tech-outlines) N.Y. 1970.

κατανομή γκαουσιανής μορφής (Σχ. 1.1). Μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι η μεγαλύτερη ποσότητα της ενέργειας περιορίζεται σε μια σχετικά μικρή περιοχή $\Delta\lambda$



(Σχ. 1.1)

γύρο από ένα μέσο μ.κ. λ_0 στο οποίο η ένταση του φωτός έχει τη μέγιστη τιμή. Όμως κατά τα γνωστά η ένταση του φωτός I σχετίζεται με το πλάτος ψ του αντίστοιχου ηλεκτρικού πεδίου μέσω της σχέσης: $I \sim |\psi|^2$. Επίσης είναι γνωστό ότι το τετράγωνο μιας γκαουσιανής συνάρτησης είναι και πάλι μια γκαουσιανή. Επίσης αποδεικνύεται ότι το συνολικό πλάτος ψ του πεδίου που συνιστά τον κυματοσυρμό είναι της ίδιας μορφής. Δηλ. το συχνοτικό του περιεχόμενο ακολουθεί ένα γκαουσιανό προφίλ. Το γεγονός αυτό μας οδηγεί στο συμπέρασμα ότι και το προφίλ (η περιβάλλουσα) εκάστου των κυματοσυρμών (πεδίο) που συνθέτουν τη δέσμη είναι γκαουσιανή. Η μορφή αυτή του κυματοσυρμού είναι η πλέον ρεαλιστική και σχετίζεται με τον τρόπο που εκπέμπει ακτινοβολία ένα διεγειρόμενο άτομο. Αυτός αλώστε είναι και ο λόγος του ενδιαφέροντός μας όσον αφορά τη μελέτη του χωρικού συχνοτικού του περιεχομένου.

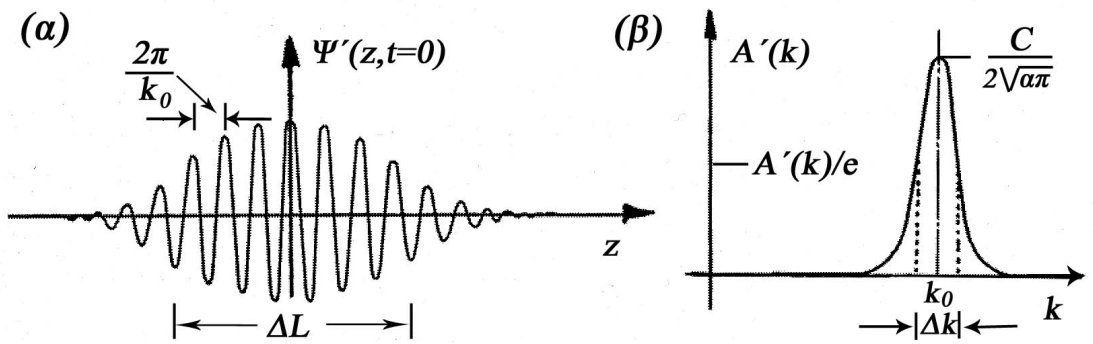
Στην περίπτωση αυτή– όπως φαίνεται στο (Σχ. 1.2α) – το πεδίο του κυματοσυρμού να περιγράφεται από τη συνάρτηση:

$$\psi'(z,t=0) = Ce^{-az^2}e^{ik_0 z} \qquad \alpha > 0 \tag{1.6}$$

όπου – όπως θα δούμε αμέσως μετά – η θετική σταθερή α συνδέεται με το μήκος του κυματοσυρμού. Γνωρίζουμε όμως από την ανάλυση κατά Fourier, ότι αν $\psi(z,t=0) = \int_{-\infty}^{\infty} A(k)e^{-ikz}dk$ (σχ. 1.3) περιγράφει μια συνάρτηση του z, η (σχ. 1.4)

$A(k)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\psi(z,t=0)e^{ikz}dz$ είναι ο μετασχηματισμός Fourier και περιγράφει τα πλάτη $A(k)$ των συνιστωσών της. Τότε αν $\psi'(z,t=0)=\psi(z,t=0)e^{ik_0z}$ θα έχουμε κατά Fourier:

$$\left.\begin{aligned} A'(k)&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\psi'(z,t=0)e^{ikz}dz=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\psi(z,t=0)e^{ik_0z}e^{ikz}dz\\ &=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\psi(z,t=0)e^{i(k+k_0)z}dz=A(k-k_0)\end{aligned}\right\}\qquad(1.7)$$



(Σχ. 1.2)

Επομένως αρκεί κατ' αρχήν να υπολογίσουμε το μετασχηματισμό Fourier της συνάρτησης: $\psi(z,t=0)=Ce^{-az^2}\quad a>0$.

Πράγματι από τη (σχ. 1.4) θα έχουμε:

$$\left.\begin{aligned} A(k)&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\psi(z,t=0)e^{ikz}dz=\frac{C}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-az^2}e^{ikz}dz=\frac{C}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-a\left(z^2-\frac{ikz}{a}\right)}dz\\ &=\frac{Ce^{-\frac{k^2}{4a}}}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{\frac{k^2}{4a}}e^{-a\left(z^2-\frac{ikz}{a}\right)}dz=\frac{Ce^{-\frac{k^2}{4a}}}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\left\{\sqrt{a}\left[z-\frac{ik}{2a}\right]\right\}^2}dz\end{aligned}\right\}\qquad(1.8)$$

Και αν θέσουμε: $\sqrt{a}\left[z-\frac{ik}{2a}\right]=y\ \Rightarrow\ \sqrt{a}dz=dy$ οπότε:

$\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\left\{\sqrt{a}\left[z-\frac{ik}{2a}\right]\right\}^2}dz=\frac{1}{\sqrt{a}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-y^2}dy=\sqrt{\frac{\pi}{a}}$ επειδή: $\int_{-\infty}^{\infty}e^{-y^2}dy=\sqrt{\pi}$ (όπου η ολοκλήρωση γίνεται στον πραγματικό άξονα z). Επομένως:

$A(k)=\frac{Ce^{-\frac{k^2}{4a}}}{2\pi}\sqrt{\frac{\pi}{a}}=\frac{C}{2\sqrt{a\pi}}e^{-\frac{k^2}{4a}}$. Και με βάση τη (σχ. 1.7):

$$A'(k)=\frac{C}{2\sqrt{a\pi}}e^{-\frac{(k-k_0)^2}{4a}} \tag{1.9}$$

της οποίας η γραφική παράσταση δίνεται στο (Σχ. 1.2β) και είναι γκαουσιανής μορφής.

Κατά σύμβαση το χωρικό συχνοτικό της εύρος Δk είναι το διπλάσιο του $k-k_0$ (δηλ. $\Delta k=2(k-k_0)$) όπου k είναι η τιμή εκείνη για την οποία η συνάρτηση $A'(k)$ γίνεται το $1/e$ της μέγιστης τιμής της. Δηλ. $\frac{C}{2\sqrt{a\pi}}e^{-\frac{(k-k_0)^2}{4a}}=\frac{C}{2\sqrt{a\pi}}e^{-1}$ από την οποία βρίσκουμε: $k-k_0=2\sqrt{a}$ οπότε:

$$\Delta k=2(k-k_0)=4\sqrt{a} \tag{1.10}$$

Όσον αφορά το χωρικό εύρος ΔL του κυματοσυρμού (Σχ. 1.2α), αυτό υπολογίζεται με τον ίδιο ακριβώς τρόπο με τη βοήθεια της περιβάλλουσας συνάρτησης του κυματοσυρμού που είναι και αυτή γκαουσιανής μορφής και δίνεται από τη σχέση: $\psi=Ce^{-az^2}$ $a>0$. Και εδώ θεωρούμε κατά σύμβαση το χωρικό εύρος ΔL ότι είναι διπλάσιο της τιμής του z (δηλ. $\Delta L=2z$) (μετρούμενης από την αρχή του συστήματος συντεταγμένων), για την οποία η τιμή της συνάρτησης γίνεται το $1/e$ της μέγιστης τιμής της. Οπότε: $Ce^{-az^2}=Ce^{-1}$ και $z=1/\sqrt{a}$. Και τελικά:

$$\Delta L=2/\sqrt{a} \tag{1.11}$$

Αν τώρα αντικαταστήσουμε την τιμή $\sqrt{a}$ από την προηγούμενη σχέση στην (σχ. 1.10) βρίσκουμε: $\Delta k=8/\Delta L$. Δηλ. τελικά:

$$\Delta k\sim 1/\Delta L \tag{1.12}$$

Που σημαίνει ότι όσο ο κυματοσυρμός (εδώ γκαουσιανής μορφής) αυξάνεται σε μήκος, τόσο πιο στενό είναι το χωρικό φασματικό του περιεχόμενο που τον εκφράζει. Με τον ίδιο επίσης τρόπο μπορούμε ν' αποδείξουμε (χρησιμοποιώντας τα στοι-

χεία του προαναφερόμενου βραχέως κυματοσυρμού στην ορατή περιοχή του Η/Μ φάσματος) ότι: $(\Delta k/k_0) \ll$.

Αν τώρα θελήσουμε να μετατρέψουμε τη (σχ. 1.12) σε χρονικούς (Δt) και συχνοτικούς $(\Delta\omega)$ όρους, αρκεί να διαφορίσουμε τη σχέση $\omega = \upsilon k$ δηλ. $\Delta\omega = \upsilon\Delta k$ (με την προϋπόθεση ότι $\upsilon = \text{σταθ.}$). Τότε αν αντικαταστήσουμε το Δk στην τελευταία από τη (σχ. 1.12) βρίσκουμε:

$$\Delta\omega \sim 1/\Delta t \tag{1.13}$$

όπου $(\Delta L/\upsilon) = \Delta t$ και Δt είναι ο χρόνος που χρειάζεται ο κυματοσυρμός προκειμένου να διέλθει από ένα ορισμένο σημείο.

Μια άμεση εφαρμογή της τελευταίας σχέσης έχουμε όσον αφορά τον προσδιορισμό του φασματικού εύρους $\Delta\omega$ (ή $\Delta\nu$) των φασματικών γραμμών κατά την εκπομπή των ατόμων των αερίων ή των ατμών των υγρών ή των στερεών. Πράγματι είναι πειραματικά επιβεβαιωμένο ότι τα άτομα εκπέμπουν κατ' αυθόρμητο διαλείποντα χρόνο της τάξης του $\Delta t = 10^{-8}$ s που είναι πεπερασμένος. Επομένως η (σχ. 1.13) μας δίνει την τάξη μεγέθους των φασματικών ορίων των συχνοτήτων που συνθέτουν τον κυματοσυρμό.

Την πλέον σπουδαία εκδήλωση φαινομένων 'απροσδιοριστίας' με τις μορφές των (σχ. 1.12 ή 1.13) συναντάμε στην Κβαντομηχανική. Πράγματι εκεί με βάση την αρχή του de Broglie, ένα σωματίδιο ενέργειας E και ορμής p συνδέεται κατά κάποιο τρόπο με ένα κύμα του οποίου η συχνότητα ω και το μ.κ. λ δίνονται από τις σχέσεις:

$$E = h\nu = \frac{h}{2\pi}\omega = \hbar\omega \tag{1.14}$$

$$p = \frac{h}{\lambda} = \frac{h}{2\pi}k = \hbar k \tag{1.15}$$

όπου $h = 6.6\times10^{-34}$ J.s είναι η σταθερή του Plank.

Μια πιο ακριβής παράσταση αυτού του κύματος είναι ότι το πλάτος του σε κάθε σημείο αποτελεί το μέτρο της πιθανότητας του να εντοπίσουμε το σωματίδιο στο σημείο αυτό. Επομένως αν το σωματίδιο πρόκειται να εντοπιστεί στα όρια ενός διαστήματος ΔL, το συνοδεύον κύμα θα πρέπει να έχει μηδενικά πλάτη έξω από αυτό το διάστημα. Τελικά δηλ. το σωματίδιο μπορεί να παρασταθεί από ένα κυματοσυρμό μήκους ΔL. Επομένως με βάση τη (σχ. 1.12) το σωματίδιο 'συνίσταται' από τη σύνθεση κυμάτων εύρους χωρικών συχνοτήτων Δk. Από τη (σχ. 1.15) όμως

του de Broglie θα έχουμε: $\Delta p = (h/2\pi)\Delta k$ η οποία με τη βοήθεια της (σχ.1.12) γίνεται:

$$\Delta p \cdot \Delta L \sim h/2\pi \tag{1.16}$$

Δηλ. υφίσταται μια απροσδιοριστία όσον αφορά την ορμή του. Όσο λοιπόν στενεύει ο κυματοσυρμός δηλ. το ΔL (που σημαίνει ότι εντοπίζουμε το σωματίδιο με μεγαλύτερη ακρίβεια), τόσο αυξάνει η απροσδιοριστία όσον αφορά την ορμή του. Δηλ. είναι αδύνατος ο ταυτόχρονος προσδιορισμός (μέτρηση) της θέσης και της ορμής του.

Μια διαφορετική μορφή της (σχ. 1.16) προκύπτει από το συνδυασμό των (σχ. 1.14, 13). Τότε βρίσκουμε:

$$\Delta E \cdot \Delta t \sim h/2\pi \tag{1.17}$$

που σημαίνει ότι όσο αυξάνεται η ακρίβεια υπολογισμού του χρόνου διέλευσης του σωματιδίου από ένα σημείο (χρόνος διέλευσης του συνοδεύοντος κυματοσυρμού από το σημείο αυτό δηλ. το χρονικό διάστημα $t_2 - t_1 = \Delta t$ γίνει πολύ μικρό οπότε $t_1 \to t_2$), τόσο αυξάνει η απροσδιοριστία όσον αφορά την ενέργειά του. Δηλ. τελικά ταυτόχρονη μέτρηση της ενέργειας και της χρονικής στιγμής της διέλευσης του σωματιδίου από ένα σημείο είναι αδύνατη. Οι (σχ. 1.16,17) αναφέρονται και σαν αρχή απροσδιοριστίας του Heisenberg και αντιπροσωπεύουν μια πλήρη ασυμφωνία με την κλασσική φυσική για την οποία δεν υφίστανται όρια όσο αφορά την ταυτόχρονη μέτρηση των προαναφερόμενων μεγεθών που αφορούν ένα σωματίδιο. Τα συμπεράσματα αυτά της Κβαντομηχανικής, άγουν την προέλευσή τους από την κλασσική κυματική θεωρία σε συσχετισμό με την αξιωματική διατύπωση του de Broglie (σχ. 1.14,15), για την ενέργεια και την ορμή ενός σωματιδίου.

γ) *Διάδοση των κυματοσυρμών σε διασκεδάζον μέσο. Διασκεδασμός (διασπορά) των κυματοσυρμών*

Κατά τα γνωστά ένας διαδιδόμενος κυματοσυρμός περιγράφεται από τη σχέση:

$$\psi(z,t) = \int_{-\infty}^{\infty} A(k) e^{i(\omega t - kz)} dk \tag{1.18}$$

ή επειδή $\upsilon = \omega/k$

$$\psi(z,t)=\int_{-\infty}^{\infty} A(k)e^{i\omega\left(t-\frac{z}{\upsilon}\right)}dk \tag{1.19}$$

για την οποία σιωπηρά υποθέσαμε ότι η ταχύτητα φάσης υ όλων των συνιστωσών που την απαρτίζουν έχει την ίδια τιμή. Κάτω από αυτές τις συνθήκες θα έχουμε:

$$\psi(z,t)\sim\psi\left(t\pm\frac{z}{\upsilon}\right)\sim\psi(\omega t\pm kz)\sim\psi(z\pm\upsilon t) \tag{1.20}$$

που σημαίνει ότι η $\psi(z,t)$ είναι ένα τρέχον κύμα με ταχύτητα υ στη διεύθυνση του $\mp z$.

Όμως στις πλείστες των περιπτώσεων η ταχύτητα υ των συνιστωσών δεν είναι σταθερή αλλά εξαρτάται από την εκάστοτε συχνότητα ω. Δηλ. $\upsilon=\upsilon(\omega)$ και επειδή μεταξύ των ω και k υφίσταται συσχετισμός, θα είναι $\upsilon=\upsilon(k)$ και $\omega=\omega(k)$.Το φαινόμενο είναι αυτό που ονομάζουμε διασκεδασμό. Τότε όμως ο παράγοντας $t-\frac{z}{\upsilon}$ στην υπό ολοκλήρωση (σχ. 1.19) δεν θα είναι σταθερός αλλά θα εξαρτάται από το k. Δηλ. $t-\frac{z}{\upsilon}=t-\frac{z}{\upsilon(k)}$ οπότε η (σχ. 1.20) δεν θα ισχύει. Άρα σ' ένα οπτικό μέσο που εμφανίζει διασκεδασμό, ένας κυματοσυρμός δεν αποτελεί πλέον μια τρέχουσα διαταραχή της μορφής $\psi(t\pm z/\upsilon)$ ή $\psi(\omega t\pm kz)$ ή $\psi(z\pm\upsilon t)$ που η μορφή της δεν μεταβάλλεται. Πράγματι είναι προφανές ότι εφόσον οι συνιστώσες του κυματοσυρμού (απείρου μήκους, άπειρης διάρκειας) κινούνται με διαφορετικές ταχύτητες φάσης, η μορφολογία του δεν θα παραμένει η ίδια. Δηλ. σ' ένα διασκεδάζον μέσο τελικά οι μόνες διαταραχές που διαδίδονται χωρίς να μεταβάλλονται μορφολογικά, είναι οι εκάστοτε αρμονικές συνιστώσες σταθερού πλάτους απείρου μήκους και διάρκειας και φυσικά σταθερής ενεργειακής ροής. Σε πρώτη προσέγγιση βέβαια μπορούμε ν' αποδείξουμε (όπως θα δούμε στα επόμενα) ότι ένας κυματοσυρμός είναι δυνατόν να διαδοθεί χωρίς να μεταβληθεί μορφολογικά.

Στη γενικότερη περίπτωση, τους διάφορους τύπους διασκεδασμού είναι δυνατόν να τους εκφράσουμε γράφοντας την ω σαν συνάρτηση του k. Τη συνάρτηση αυτή κατόπιν μπορούμε να την αναλύσουμε κατά Taylor σε σχέση με μια κεντρική τιμή $k=k_0$ η οποία αποτελεί – αν μπορούμε να πούμε – τη 'φέρουσα' χωρική συχνότητα του κυματοσυρμού (συχνότητα που αντιστοιχεί στο μέγιστο πλάτος του), που κατά τα γνωστά μπορεί να γραφεί με τη μορφή:

$$\psi(z) = \mathrm{A}(k_0)e^{ik_0 z} \tag{1.21}$$

(Ένα παράδειγμα τέτοιου κυματοσυρμού (για $t=0$) μελετήσαμε προηγουμένως (σχ. 1.6)).

Η ανάλυση λοιπόν της $\omega(k)$ θα μας δώσει :

$$\omega = \omega_0 + \upsilon_g(k-k_0) + \beta(k-k_0)^2 + \cdots \tag{1.22}$$

όπου: $\upsilon_g = \left.\dfrac{\partial\omega}{\partial k}\right|_{k=k_0}$ (4.5.4.23) $\beta = \left.\dfrac{\partial^2\omega}{\partial k^2}\right|_{k=k_0}$ (1.24)

και ο ακριβής αριθμός των όρων της (σχ. 1.22) που θα χρησιμοποιήσουμε, εξαρτάται από τα χωρικά φασματικά όρια του εκάστοτε διαδιδόμενου κυματοσυρμού. Αν υποθέσουμε κατ' αρχήν ότι το μήκος ΔL του κυματοσυρμού είναι αρκετά μεγάλο, τότε το φασματικό του εύρος $\Delta k = 2(k-k_0)$ είναι πολύ μικρό. Οπότε ο όρος $\beta(k-k_0)^2$ της (σχ. 1.22) (καθώς και οι όροι ανώτερης τάξης) είναι αμελητέοι. Επομένως η (σχ. 1.22) μπορεί να γραφεί:

$$\omega = \omega_0 + \upsilon_g(k-k_0) \tag{1.25}$$

Και με την αντικατάστασή της στη (σχ. 1.18) θα έχουμε:

$$\begin{aligned}
\psi(z,t) &= \int_{-\infty}^{\infty} A(k)e^{i(\omega t - kz)}dk = \int_{-\infty}^{\infty} A(k)e^{-ikz}e^{i\omega t}dk = \int_{-\infty}^{\infty} A(k)e^{-ikz}e^{i\left[\omega_0+\upsilon_g(k-k_0)\right]t}dk \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} A(k)e^{ik_0 z}e^{-ik_0 z}e^{-ikz}e^{i\omega_0 t}e^{i\upsilon_g(k-k_0)t}dk = e^{i(\omega_0 t - k_0 z)}\int_{-\infty}^{\infty} A(k)e^{-i(k-k_0)z}e^{i\upsilon_g(k-k_0)t}dk \\
&= e^{i(\omega_0 t - k_0 z)}\int_{-\infty}^{\infty} A(k)e^{i(k-k_0)(\upsilon_g t - z)}dk \quad \Rightarrow
\end{aligned}$$

$$\psi(z,t) = e^{i(\omega_0 t - k_0 z)}\int_{-\infty}^{\infty} A(k)e^{i(k-k_0)\upsilon_g\left(t-\frac{z}{\upsilon_g}\right)}dk \tag{1.26}$$

όπου βέβαια υ_g είναι ανεξάρτητη του k και η (σχ. 1.26) μπορεί να γραφεί με τη μορφή:

$$\psi(z,t)=\psi_0\left(t-\frac{z}{\upsilon_g}\right)e^{i(\omega_0 t-k_0 z)}=\psi_0\left(t-\frac{z}{\upsilon_g}\right)e^{i\omega_0\left(t-\frac{z}{\upsilon_{ph}}\right)} \tag{1.27}$$

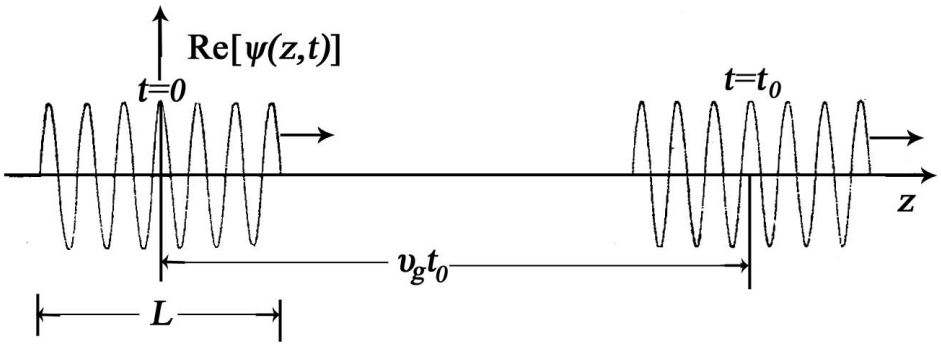
όπου: $\upsilon_{ph}=\omega_0/k_0$.

Η (σχ. 1.27) παριστάνει ένα οδεύον προς την $+z$ διεύθυνση αρμονικό κύμα συχνότητας ω_0, το οποίο είναι διαμορφωμένο από τη συνάρτηση $\psi_0\left(t-z/\upsilon_g\right)$ της οποίας η ακριβής μορφή εξαρτάται από το φασματικό περιεχόμενο της συνάρτησης $A(k)$ και που αφορά τον εκάστοτε διαδιδόμενο κυματοσυρμό.

Από τη μορφολογία όμως της συνάρτησης $\psi_0\left(t-z/\upsilon_g\right)$ επειδή $\upsilon_g=$ σταθ., συμπεραίνουμε ότι συνιστά ένα διαδιδόμενο προς την $+z$ διεύθυνση κύμα, του οποίου η ταχύτητα είναι η υ_g. Παρά το ότι δηλ. η περιβάλλουσα του διαδιδόμενου κυματοσυρμού μορφολογικά δεν μεταβάλλεται με τον χρόνο, οποιοδήποτε σημείο της κινείται με ταχύτητα υ_g την οποία και ονομάζουμε ***ταχύτητα ομάδας (group velocity)***. Πρόκειται για ένα είδος 'ταχύτητας φάσης' των σημείων της περιβάλλουσας, όπως μπορεί ν' αποδειχθεί από τη διαφόριση του παράγοντα $\left(t-z/\upsilon_g\right)$. Στην περίπτωση λοιπόν για την οποία ισχύει η (σχ. 1.25), τότε οι συνιστώσες ενός οποιουδήποτε κυματοσυρμού που διαδίδεται σ' αυτό το μέσο, διαδίδονται με τις ταχύτητες φάσης τους χωρίς να μεταβάλλονται χρονικά τα πλάτη τους (αμεταβλητότητα της μορφής της περιβάλλουσας του κυματοσυρμού. Όμως ο κυματοσυρμός σαν όλο (δηλ. το κάθε σημείο της περιβάλλουσάς του) θα κινείται με την ταχύτητα υ_g δηλ. την ταχύτητα ομάδας.

Σαν παράδειγμα θεωρούμε ότι ένας κυματοσυρμός της μορφής που φαίνεται στο (Σχ. 1.3) (αρμονικός με τετραγωνικό προφίλ) , προσπίπτει σ' ένα μέσο (στο χρόνο $t=0$) για το οποίο ισχύει η (σχ. 1.25). Τότε σε χρόνο $t=t_0$ ο κυματοσυρμός μέσα στο μέσο θα έχει διανύσει απόσταση ίση με $\upsilon_g t_0$ όπως φαίνεται στο (Σχ. 1.3). Το παραπάνω αποτελεί και ένα παράδειγμα μέτρησης της ταχύτητας μιας κυματικής διαταραχής από την άποψη ότι η μέτρηση αφορά τον υπολογισμό του χρόνου που απαιτείται προκειμένου η διαταραχή να διανύσει μια ορισμένη απόσταση. Τότε ο λόγος αυτής της απόστασης προς το χρόνο είναι η ταχύτητα ομάδας υ_g. Όσον αφορά τώρα τη μέτρηση των ταχυτήτων των συνιστωσών αρμονικών διαταραχών (απείρου μήκους και διάρκειας) σταθερού πλάτους και άρα σταθερής ενεργειακής ροής, η προαναφερόμενη μέτρηση δεν είναι εφικτή. Προκειμένου να μετρήσουμε άμεσα την ταχύτητα ενός τέτοιου κύματος (με την προαναφερόμενη μέθοδο) είναι απαραίτητο να δημιουργήσουμε μια έστω τοπική μεταβολή στο πλάτος του. Η διαδικασία όμως αυτή συντελείται μόνο μέσω της εισαγωγής επιπλέον χωρικών συχνοτήτων. Άρα με το που θα μετρήσουμε την απόσταση που διανύει έστω μια

παραμικρή ιδιομορφία του πλάτους του κύματος στον αντίστοιχο χρόνο, είναι σαν να μετράμε την ταχύτητα ομάδας.



(Σχ. 1.3)

Επομένως η ταχύτητα $\upsilon = \upsilon_{ph}$ ενός κύματος απείρου μήκους και διάρκειας δεν θα μπορούσε να θεωρηθεί σαν ταχύτητα διάδοσης αλλά θα μπορούσε να καθοριστεί (και να μετρηθεί) με βάση τη φασική συμπεριφορά του. Δηλ.

$$\left.\begin{aligned} &\phi = \omega t - kz = \text{σταθ.} \;\Rightarrow\; \omega dt - kdz = 0 \;\Rightarrow \\ &\Rightarrow\; \upsilon = \upsilon_{ph} = \left.\frac{dz}{dt}\right|_{\phi=\text{σταθ.}} = \frac{\omega}{k} \end{aligned}\right\} \tag{1.28}$$

Η ταχύτητα αυτή (σε αντιδιαστολή με την ταχύτητα ομάδας) ονομάζεται κατά τα γνωστά ***ταχύτητα φάσης (phase velocity)***. Με τη βοήθεια των (σχ. 1.23, 28), επειδή $\omega = \upsilon_{ph} k$ θα έχουμε:

$$\upsilon_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{d\left(\upsilon_{ph} k\right)}{dk} = \upsilon_{ph} + k\frac{d\upsilon_{ph}}{dk} \tag{1.29}$$

από την οποία βλέπουμε ότι αν η υ_{ph} είναι ανεξάρτητη του k τότε $d\upsilon_{ph}/dk = 0$ και $\upsilon_g = \upsilon_{ph}$. Επομένως η μόνη περίπτωση που οι ταχύτητες φάσης και ομάδας συμπίπτουν, είναι όταν η διαταραχή διαδίδεται σε μη διασκεδάζον μέσο. Επειδή επίσης: $k = 2\pi/\lambda \;\Rightarrow\; dk = -\dfrac{2\pi d\lambda}{\lambda^2}$ οπότε από τη (σχ. 1.29) βρίσκουμε:

$$\upsilon_g = \upsilon_{ph} - \lambda\frac{d\upsilon_{ph}}{d\lambda} \tag{1.30}$$

όπου το λ είναι μεταβλητή (variant) όπως και το k στη (σχ. 1.29).

Στα επόμενα θα υποθέσουμε ότι και ο όρος δεύτερης τάξης της $\omega(k)$ (σχ. 1.22) είναι διάφορος του μηδενός. Κάτω από αυτές τις συγκεκριμένες συνθήκες αποδεικνύεται* ότι οι κυματοσυρμοί υφίστανται διασκεδασμό (διασπορά). Δηλ. κατά τη διάδοσή αλλάζει η μορφολογία τους. Με αντικατάσταση λοιπόν της (σχ. 1.22) στη (σχ. 1.18) και μετά από επίπονες μαθηματικές πράξεις θα έχουμε:

$$\psi(z,t) = Q'(z,t)e^{i\phi(t)}e^{i(\omega_0 t - k_0 z)} = \left[\frac{C}{\left(1+16a^2\beta^2t^2\right)^{1/4}} e^{-\frac{a}{1+16a^2\beta^2t^2}\upsilon_g^2\left(t-z/\upsilon_g\right)^2}\right] e^{i\phi(t)}e^{i(\omega_0 t - k_0 z)} \qquad (1.31)$$

και $\phi(t)$ ένας παράγοντας φάσης.

Για την περίπτωση που θ' αγνοήσουμε τις διαταραχές που οφείλονται στον παράγοντα φάσης ($\exp\{i\phi\}$) της (σχ. 1.31)), τότε ο όρος $Q'(z,t)$ μπορεί να θεωρηθεί ότι αποτελεί το προφίλ του κυματοσυρμού $\psi(z,t)$. Διαπιστώνουμε ότι ο τελευταίος είναι γκαουσιανής μορφής και διαδίδεται με ταχύτητα ίση με την ταχύτητα ομάδας υ_g. Όμως με βάση τη (σχ. 1.11) ($\Delta L = 2/\sqrt{a'}$) το εύρος του προφίλ του τείνει χρονικά να διευρύνεται δηλ.

$$\Delta L = \Delta L(t) = 2\sqrt{\frac{1+16a^2\beta^2t^2}{a}} \qquad (1.32)$$

Οπότε μπορούμε να γράψουμε:

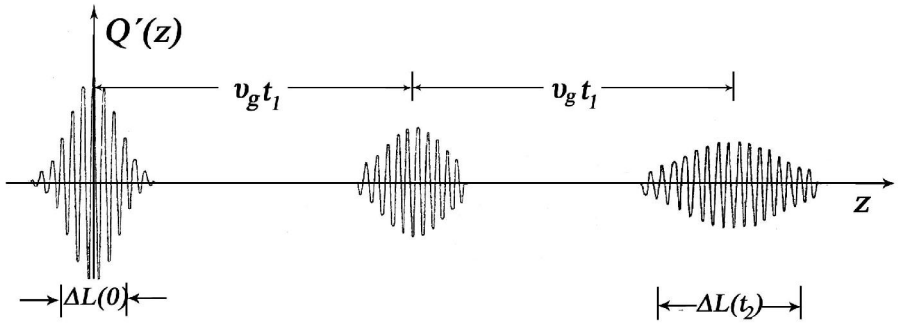
$$\frac{\Delta L(t)}{\Delta L(0)} = \sqrt{1+16a^2\beta^2t^2} = \sqrt{1+256\beta^2t^2/\left[\Delta L(0)\right]^4} \qquad (1.33)$$

που σημαίνει από φυσική άποψη ότι όσο πιο στενός χωρικά είναι ο κυματοσυρμός στο χρόνο $t=0$ τόσο μεγαλύτερος είναι ο λόγος της παραμόρφωσής του. Ο χρόνος t για τον οποίο $\Delta L(t) = 2\Delta L(0)$ προκύπτει από τη (σχ. 1.33) :

$$\sqrt{1+16a^2\beta^2t^2} = 2 \;\Rightarrow\; 16a^2\beta^2t^2 = 3 \;\Rightarrow\; t = \sqrt{3}/4a\beta$$

* J. M. Pearson: 'A Theory of Waves' (1966) ch.5 Dispersion of waves.

Στο (Σχ. 1.4) μπορούμε να δούμε τα στιγμιότυπα των κυματοσυρμών για χρονικές στιγμές $t_0 = 0$, $t_1 = \sqrt{3}/8a\beta$, $t_2 = 2t_1 = \sqrt{3}/4a\beta$. Τη χρονική στιγμή $t = t_2$ ο



(Σχ. 1.4)

κυματοσυρμός – με βάση τους υπολογισμούς μας – έχει διπλάσιο εύρος σε σχέση με αυτό που είχε τη χρονική στιγμή $t = 0$. Δηλ. $\Delta L(t_2) = 2\Delta L(0)$. Τα προηγούμενα βέβαια, με την προϋπόθεση ότι δεν λαμβάνουμε υπόψη μας τις διαταραχές λόγω του παράγοντα φάσης $\exp\{\phi(t)\}$ (σχ. 1.31).

Από τα προαναφερόμενα γίνεται φανερό ότι οι διαταραχές μπορεί να διαδίδονται σε μέσα όπου οι ταχύτητες φάσης (ή αντίστοιχα οι συχνότητες) των συνιστωσών τους δεν είναι οι ίδιες αλλά υπόκεινται σε μια συναρτησιακή εξάρτηση της μορφής της (σχ. 1.22). Κάτω από αυτές τις συνθήκες, η διάδοση των διαταραχών συνοδεύεται από ελάττωση του πλάτους τους και αύξηση του μήκους τους. Δηλ. υπόκεινται σ' ένα είδος διασποράς ή διασκεδασμού στο μέσο διάδοσής τους. Εξ ου και τ' όνομα του φαινομένου που μελετούμε: Διασπορά ή διασκεδασμός.

ΘΕΜΑ 2

Οπτικές ιδιότητες των αγωγών. Διάδοση Η/Μ κυμάτων στα μέταλλα. Εξισώσεις διασκεδασμού και ανακλαστικότητας

Είναι γνωστό ότι οι ***αγωγοί*** σε σχέση με τα ***διηλεκτρικά*** έχουν αγωγιμότητα κατά δεκαπέντε με είκοσι τάξεις μεγέθους μεγαλύτερη. Το γεγονός οφείλεται στο ότι διαθέτουν μεγάλο αριθμό ηλεκτρικών φορέων (ηλεκτρονίων) οι οποίοι έχουν τη δυνατότητα να κινούνται ελεύθερα στο εσωτερικό τους (θερμική κίνηση), ή διατεταγμένα κάτω από την επίδραση εξωτερικών ηλεκτρικών πεδίων (ηλεκτρικό ρεύμα). Από τους αγωγούς τα ***μέταλλα*** διαθέτουν όπως είναι γνωστό μεγάλο αριθμό ελευθέρων ηλεκτρονίων τα οποία διαφοροποιούνται ως προς τα δέσμια ηλεκτρόνια των ατόμων τα οποία δεν έχουν τη δυνατότητα της ελεύθερης κίνησης στο εσωτερικό του υλικού. Για ένα ομογενή και ισότροπο αγωγό, το κινούμενο φορτίο ανά μονάδα χρόνου και ανά μονάδα επιφάνειας (πυκνότητα ρεύματος j), συνδέεται με το εφαρμοζόμενο ηλεκτρικό πεδίο E μέσω της γνωστής σχέσης $j = \sigma E$, όπου σ η αγωγιμότητα του μέσου. Για τα μέταλλα η σ θα έχει σημαντική τιμή ενώ για τα διηλεκτρικά $\sigma \simeq 0$.

Ας θεωρήσουμε ότι ο αγωγός είναι τέλειος δηλ. διαθέτει πολύ μεγάλη αγωγιμότητα. Τότε κατά την επίδραση ενός εξωτερικού αρμονικού πεδίου, τα ηλεκτρόνια θα εκτελούν αρμονικές κινήσεις εντελώς ανεμπόδιστα. Επειδή δεν θα υπάρχουν δυνάμεις επαναφοράς (αυτό συμβαίνει για τα δέσμια ηλεκτρόνια λόγω των δυνάμεων που ασκούν οι πυρήνες των ατόμων), δεν θα υφίστανται συχνότητες συντονισμού δηλ. φαινόμενα απορρόφησης. Επομένως η προσπίπτουσα ακτινοβολία θα επανεκπέμπεται στο σύνολό της. Το τελευταίο όμως δεν συμβαίνει στα πραγματικά μέταλλα. Σ' αυτά λόγω της θερμικής κίνησης (δόνησης) των πλεγμάτων και των ατελειών δομής, θα έχουμε συγκρούσεις των ηλεκτρονίων δηλ. εμφάνιση αντίστασης με συνέπεια τη μετατροπή της Η/Μ ενέργειας σε θερμότητα Joule. Δηλ. η παρατηρούμενη απορρόφηση που εμφανίζουν τα μέταλλα έχει άμεση σχέση με την αγωγιμότητά τους.

Στην περίπτωση που θεωρήσουμε ότι ο αγωγός είναι ένα συνεχές μέσο, τότε ο συνδυασμός των διαφορικών εξισώσεων του Maxwell (σχ. 2.1.13.8 – 11) για $\rho = 0$, $\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E} \neq 0$ οδηγεί στην παρακάτω κυματική εξίσωση:

$$\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial z^2} = \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} + \mu\sigma \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \tag{2.1}$$

όπου ε, μ είναι αντίστοιχα η ηλεκτρική και η μαγνητική διαπερατότητα του μέσου και σ η αγωγιμότητά του. $\mathbf{E}$ το διαδιδόμενο πεδίο στον αγωγό. Ο όρος $\partial\mathbf{E}/\partial t$ συνιστά τη γενεσιουργό αιτία ανάδειξης ηλεκτρεγερτικής δύναμης. Κατά προέκταση η ανάπτυξη διαφοράς δυναμικού στα άκρα της αντίστασης που εμφανίζει ο αγωγός αποτελεί το λόγο κατανάλωσης ενέργειας από το πεδίο προς το υλικό (θερμότητα Joule). Το συγκεκριμένο γεγονός αποτελεί την αιτία απορρόφησης ακτινοβολίας από τους αγωγούς.

Προκειμένου να επιλύσουμε τη δ.ε. που μας δίνει η (σχ.2.1), μπορούμε να την μετασχηματίσουμε έτσι ώστε να έχει τη μορφή που θα είχε για ένα ομογενές διηλεκτρικό. Το ζητούμενο επιτυγχάνεται αν η ηλεκτρική διαπερατότητα του μέσου λάβει μιγαδική μορφή. Αυτό οδηγεί σ' ένα μιγαδικό πλέον δ.δ. $\tilde{n}$ της μορφής:

$$\tilde{n} = n - i\kappa \tag{2.2}$$

όπου n κατά τα γνωστά (βλ. ΠΑΡ/ΜΑ 1) ο δείκτης διάθλασης και κ ο συντελεστής απόσβεσης. n και κ είναι πραγματικοί αριθμοί. Κάτω από αυτές τις συνθήκες μπορούμε να δεχτούμε σαν λύση της (σχ. 2.1) ένα επίπεδο μετ. κύματος της μορφής:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{i(\omega t - \tilde{k}z)} \tag{2.3}$$

το οποίο θα διαδίδεται στη διεύθυνση z στο εσωτερικό του αγωγού. Όπου $\tilde{k} = \tilde{n}k_o$ με $k_0 = 2\pi/\lambda_0$ και λ_0 το μ.κ. του φωτός στον ελεύθερο χώρο $n = \lambda_0/\lambda = k/k_0$. Κατά την αντικατάσταση της (σχ. 2.2) στη (σχ. 2.3) λαμβάνοντας υπόψη μας την $\tilde{k} = \tilde{n}k_o$ βρίσκουμε:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_o e^{-\frac{2\pi\kappa}{\lambda_o}z} e^{i\left[\omega t - \frac{2\pi n}{\lambda_o}z\right]} \tag{2.4}$$

Από τη (σχ. 2.4) βλέπουμε ότι στο εσωτερικό του αγωγού κατά τη διεύθυνση z διαδίδεται μια αρμονική διαταραχή με ταχύτητα $\upsilon = \lambda_0\omega/2\pi n$ της οποίας όμως το πλάτος κατά την ίδια διεύθυνση ελαττώνεται εκθετικά κατά τον παράγοντα $e^{-(2\pi\kappa)/\lambda_o}$. Επειδή η ένταση του φωτός κατά τα γνωστά είναι ανάλογη του τετραγώνου του πλάτους τότε:

$$I = I_0 e^{-az} \qquad \text{(νόμος του Beer)} \tag{2.5}$$

Όπου $\alpha = 4\pi\kappa/\lambda_0$. Η σταθερή a ονομάζεται κατά τα γνωστά συντελεστής απορρόφησης (absorption coefficient) ή συντελεστής εξασθένισης (attenuation coefficient). Όταν $z = 1/a$ τότε $I/I_0 = 1/e \simeq 1/3$. Δηλ. σε βάθος $z = 1/a$ η ένταση του φωτός ελαττώνεται κατά το ένα τρίτο περίπου της αρχικής. Η τιμή αυτή του z ονομάζεται ***βάθος διείσδυσης (penetration depth)***. Υπάρχει μεγάλη διαφορά μεταξύ του βάθους διείσδυσης για τα διηλεκτρικά και τους αγωγούς. Στους τελευταίους είναι πάρα πολύ μικρό. Ενδεικτικά για φως με $\lambda_0 \simeq 500\text{nm}$ είναι της τάξης του μικρού (μm). Δηλ. τόσο βάθος επαρκεί για να θεωρήσουμε ότι έχει σχεδόν απορροφηθεί η διαθλώμενη στον αγωγό ακτινοβολίας. Από εδώ προκύπτει και η αδιαφάνειά τους. Στο ίδιο όμως γεγονός οφείλεται και η μεγάλη τους ανακλαστικότητα. Πράγματι το διαθλώμενο (απορροφούμενο) ποσοστό της προσπίπτουσας ακτινοβολίας από τα ηλεκτρόνια (παρά το ότι τα τελευταία απορροφούν έντονα) είναι πολύ μικρό. Οπότε το υπόλοιπο εμφανίζεται σαν ανακλώμενο.

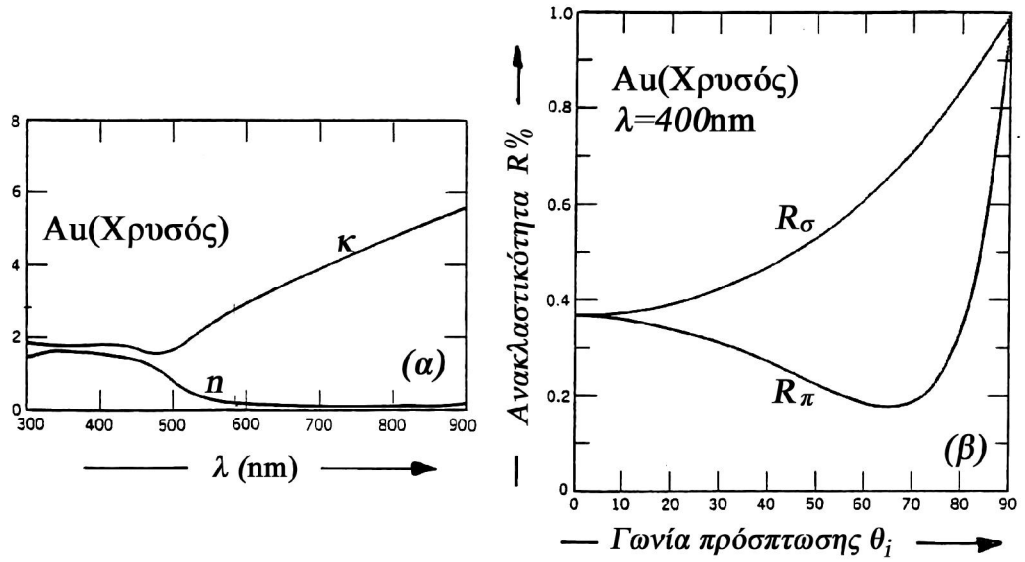
Όσον αφορά τις εξισώσεις διασκεδασμού των αγωγών (εξάρτηση του δ.δ. n από την συχνότητα ω της προσπίπτουσας ακτινοβολίας), θα πρέπει να λάβουμε υπόψη μας και το γεγονός ότι υπάρχουν εκτός των ελευθέρων και τα δέσμια ηλεκτρόνια των ατόμων του πλέγματος. Τα ελεύθερα ηλεκτρόνια – όπως ήδη αναφέραμε – δεν υπόκεινται σε δυνάμεις επαναφοράς δηλ. δεν δημιουργούν συχνότητες συντονισμού και σε γενικές γραμμές αποτελούν το κυρίαρχο στοιχείο της ανάδειξης των οπτικών ιδιοτήτων στους αγωγούς. Η (σχ. 2.6) συνιστά μια απλή εξίσωση διασκεδασμού, που αφορά μία συχνότητα συντονισμού ω_0.

$$\tilde{n}^2(\omega) = 1 + \frac{Nq_e^2}{\varepsilon_o m_e}\left[\frac{n_e}{-\omega^2 + i\gamma_e\omega} + \frac{1}{\omega_o^2 - \omega^2 + i\gamma_b\omega}\right] \tag{2.6}$$

Αποτελείται από δύο όρους στο εσωτερικό της αγκύλης από τους οποίους ο πρώτος είναι η συνεισφορά των ελευθέρων ηλεκτρονίων (όπου και απουσιάζουν συχνότητες συντονισμού). N είναι ο αριθμός των ατόμων ανά μονάδα όγκου. q_e, m_e το φορτίο και η μάζα του ηλεκτρονίου και n_e ο αριθμός των ελευθέρων ηλεκτρονίων που αντιστοιχούν σε κάθε άτομο. Ο γ_e αποτελεί ένα παράγοντα τριβής. Ο δεύτερος όρος αφορά τη συνεισφορά των δέσμιων ηλεκτρονίων και περιλαμβάνει μία συχνότητα συντονισμού ω_0. Η σταθερή γ_b αποτελεί κι αυτή έναν παράγοντα τριβής για την κίνηση των δέσμιων ηλεκτρονίων.

Υποθέτουμε τώρα ότι ένα μέταλλο παρουσιάζει μια ορισμένη απόχρωση. Τότε η απορρόφηση ορισμένων ακτινοβολιών από αυτό, θα οφείλεται αφ' ενός μεν στην επιλεκτική απορρόφηση λόγω των συχνοτήτων συντονισμού ω_{0i} εξ αιτίας των δέσμιων ηλεκτρονίων καθώς και στην γενική που προκαλείται από τα ελεύθερα η-

λεκτρόνια. Έχουμε ήδη αναφέρει ότι ένα υλικό που απορροφά ισχυρά σε μια ορισμένη συχνότητα ή περιοχή συχνοτήτων στην πραγματικότητα δεν απορροφά το σύνολο της προσπίπτουσας σ' αυτό ακτινοβολίας αλλά ένα σχετικά μικρό ποσοστό. Το υπόλοιπο ανακλάται επιλεκτικά. Τη διαδικασία αυτή μπορούμε να τη παρακολουθήσουμε με τη βοήθεια του διαγράμματος στο (Σχ. 2.1α) που αφορά τα πειραματικά αποτελέσματα υπολογισμού του πραγματικού μέρους n (δ.δ.) και του φανταστικού μέρους κ (συντελεστή απόσβεσης) του μιγαδικού δ.δ. $\tilde{n}$ του χρυσού (Au). Πράγματι στην περιοχή γύρω στα 500nm ο δ.δ. n ελαττώνεται ενώ ο κ αυξάνεται απότομα. Άρα πάνω από αυτήν την περιοχή δηλ. για μεγαλύτερα μ.κ. ο συντελεστής εξασθένισης ($\alpha = 4\pi\kappa/\lambda_0$) γίνεται μεγαλύτερος με συνέπεια να ελαττώνεται κατά πολύ το μήκος διείσδυσης της ακτινοβολίας και κατά συνέπεια ν' αυξάνεται η ανακλαστικότητα του υλικού. Άρα η ανακλώμενη από το χρυσό ακτινοβολία προέρχεται ως επί το πλείστον από την κιτρινοκόκκινη περιοχή του ορατού Η/Μ φάσματος. Στο συγκεκριμένο γεγονός οφείλεται και η απόχρωσή του. Ένα ό-



(Σχ. 2.1)

μως λεπτό υμένιο Χρυσού (π.χ. 1μm) έχει αρκετά μεγάλο πάχος ώστε κατά τη διέλευση από αυτό λευκού φωτός ν' απορροφήσει την κιτρινοκόκκινη περιοχή λόγω της μεγάλης τιμής του κ. Δεν είναι όμως αρκετά μεγάλο για την κυανοπράσινη περιοχή, όπου ο συντελεστής κ είναι πολύ μικρός με συνέπεια και το βάθος διείσδυσης πολύ μεγάλο συγκρινόμενο με το πάχος 1μm του υμενίου. Το γεγονός θα έχει σαν αποτέλεσμα τη διέλευση της συγκεκριμένης περιοχής του φάσματος με συνέπεια η απόχρωση του υμενίου στο διερχόμενο φως να είναι κυανοπράσινη.

Θα μπορούσαμε να πάρουμε μια απλοποιημένη έκφραση της εξίσωσης διασκεδασμού, αν θεωρούσαμε κατ' αρχήν ότι δεν υφίσταται η συνεισφορά των δέσμιων ηλεκτρονίων. Δηλ. στην πραγματικότητα απουσιάζουν συχνότητες συντονισμού και ο παράγοντας τριβής γ_e είναι μηδενικός για πολύ μεγάλες συχνότητες ω. Τότε για ($n_e = 1$) η (σχ. 2.6) γίνεται:

$$n^2(\omega) = 1 - \frac{Nq_e^2}{\varepsilon_0 m_e \omega^2} \tag{2.7}$$

Ας υποθέσουμε τώρα ότι τα ελεύθερα ηλεκτρόνια και τα θετικά ιόντα του πλέγματος του μετάλλου συμπεριφέρονται σαν πλάσμα το οποίο ταλαντεύεται με μια οριακή συχνότητα την οποία αποκαλούμε ***συχνότητα πλάσματος (plasma frequency)***. Η συχνότητα αυτή με βάση τη (σχ. 2.7) θα είναι: $\omega_p = \left(Nq_e^2/\varepsilon_0 m_e\right)^{1/2}$ οπότε:

$$n^2(\omega) = 1 - \omega_p^2/\omega^2 \tag{2.8}$$

Τότε για τιμές του $\omega < \omega_p \rightarrow 1 - \omega_p^2/\omega^2 < 0$ και ο δ.δ. $n(\omega)$ θα είναι φανταστικός με συνέπεια το υλικό να εμφανίζει μεγάλη τιμή του συντελεστή κ. Δηλ. μεγάλη απορροφητικότητα και παράλληλα υψηλή ανακλαστικότητα. Εάν όμως $\omega > \omega_p$ τότε ο δ.δ. n είναι πραγματικός αριθμός και μάλιστα μικρότερος της μονάδας όπως ακριβώς συμβαίνει στα διηλεκτρικά για πολύ μεγάλες συχνότητες. Τότε το υλικό γίνεται διαπερατό.

Με βάση τα προαναφερόμενα και με δεδομένο τον έλεγχο πάχους εναπόθεσης μεταλλικών υμενίων, είναι δυνατόν να κατασκευάσουμε διάφορα φίλτρα. Π.χ. ένα αρκετά λεπτό υμένιο χρυσού σε κατάλληλο υπόβαθρο μπορεί ν' ανακλά ισχυρά τις (θερμικές) υπέρυθρες ακτινοβολίες αλλά συγχρόνως να είναι διαπερατό για την ορατή περιοχή του Η/Μ φάσματος. Με τη βοήθεια λοιπόν κατάλληλων μεταλλικών υμενίων, είναι δυνατόν να ελέγξουμε την ανακλαστικότητα και τη διαπερατότητα της ενδοεπιφάνειας μεταξύ του μετάλλου και ενός υποβάθρου από διηλεκτρικό. Τέτοια συστήματα αποτελούν οι ***διαχωριστές δέσμης(beam splitters)***. Μια δηλ. προσπίπτουσα σ' αυτούς δέσμη φωτός διαχωρίζεται σε μια διερχόμενη και σε μια ανακλώμενη, με ορισμένο ποσοστό % η κάθε μια σε σχέση με την προσπίπτουσα. Επίσης συστήματα μεγάλης ανακλαστικότητας ($R = 0.7 - 0.9$) και μικρής διαπερατότητας χρησιμοποιούνται στις κοιλότητες συντονισμού των συμβολόμετρων Fabry-Perot, προκειμένου να πετύχουμε ενίσχυση της συμβολής μέσω της επαλληλίας πολλαπλών δεσμών (βλ. Κεφ. 6: Συμβολή του φωτός).

Τέλος υποθέτουμε ότι έχουμε κάθετη πρόσπτωση μιας δέσμης φωτός στην επιφάνεια ενός αγωγού και θέλουμε να υπολογίσουμε την ανακλαστικότητά της με την προϋπόθεση ότι ο δ.δ. είναι μιγαδικός αριθμός. Τότε με τη βοήθεια της (σχ. 2.8.1) για $\theta_i = \theta_t = 0^0$ βρίσκουμε ότι:

$$\tilde{\rho}_\sigma = \frac{\tilde{n}_i - \tilde{n}_t}{\tilde{n}_i + \tilde{n}_t} = \tilde{\rho}_\pi \tag{2.9}$$

Αν θεωρήσουμε πρόσπτωση από τον αέρα προς τον αγωγό τότε θα έχουμε $\tilde{n}_i = 1$ και $\tilde{n}_t = n - i\kappa$ οπότε:

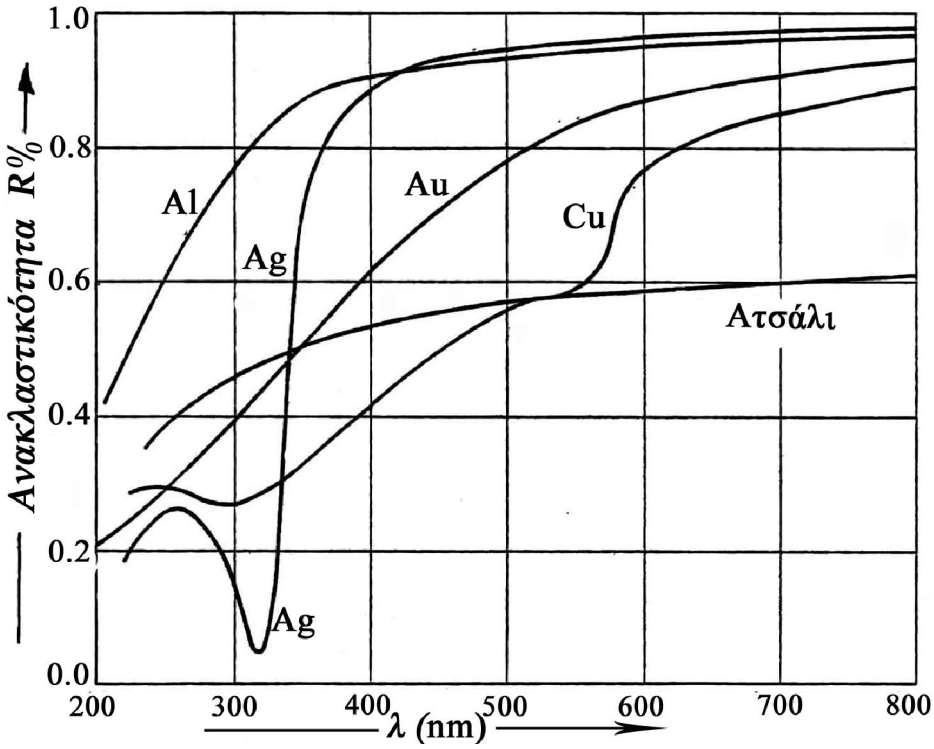
$\tilde{\rho}_\sigma = (1 - n + i\kappa)/(1 + n - i\kappa) = -\tilde{\rho}_\pi$ και επειδή $R_\sigma = R_\pi = |\tilde{\rho}_\sigma|^2 = |\tilde{\rho}_\pi|^2 = R$

$$R = \frac{(1-n)^2 + \kappa^2}{(1+n)^2 + \kappa^2} \tag{2.10}$$

Για την περίπτωση που το υλικό έχει πολύ μικρή αγωγιμότητα ($\kappa \ll$) τότε θα είναι $R = (1-n)^2/(1+n)^2$, δηλ. η ανακλαστικότητα θα καθορίζεται από τον αντίστοιχο τύπο που ισχύει για τα διηλεκτρικά. Επομένως ο δ.δ. είναι πραγματικός αριθμός και επειδή $\kappa \simeq 0$ ο συντελεστής εξασθένισης a θα τείνει προς το μηδέν. Δηλ. το βάθος διείσδυσης θα είναι πολύ μεγάλο (διαφανές υλικό.). Όταν αντίθετα ο κ είναι πολύ μεγάλος σε σχέση με τον n (βλ. (Σχ. 2.1α)) που αφορά τον χρυσό (Au) για $\lambda > 600\text{nm}$), τότε η ανακλαστικότητα R γίνεται πολύ μεγάλη και αν υποθέσουμε ότι ο δ.δ. $\tilde{n}$ είναι καθαρά φανταστικός αριθμός (δηλ. $n \simeq 0$) τότε $R \to 1$. Τυπικές τιμές των n και κ για μ.κ. $\lambda = 589.3\text{nm}$ για τον χρυσό (Au) είναι $n = 0.2$, $\kappa = 2.9$ και για τον ψευδάργυρο (Zn) $n = 1.5$, $\kappa = 5.3$.

Προκειμένου για τις ανακλαστικότητες R_σ, R_π που αφορούν πλάγια πρόσπτωση σε επιφάνεια αγωγού, οι μορφές τους (Σχ. 2.1β) σε γενικές γραμμές ομοιάζουν με αυτές των διηλεκτρικών (βλ. § 2.8) με μόνη τη διαφορά ότι το ελάχιστο της R_π γα τους αγωγούς δεν είναι μηδενικό. Επίσης οι διαφορές φάσης των δύο συνιστωσών πλατών σ και π σε σχέση με τις αντίστοιχες προσπίπτουσες είναι για κάθε γωνία πρόσπτωσης διάφορες των 0^0 και 180^0 εκτός για $\theta_i = 90^0$ οπότε οι φάσεις τους μετατοπίζονται κατά 180^0. Στο (Σχ. 2.2) βλέπουμε τις καμπύλες ανακλαστικότητας R των μετάλλων Cu (Χαλκού), Au (Χρυσού), Al (Αλουμινίου) και Ag (Αργύρου) για κάθετη πρόσπτωση και για διαφορετικά μ.κ. Διαπιστώνουμε ότι ο χρυσός (όπως και ο χαλκός), με τη βοήθεια των καμπυλών διασκεδασμού (Σχ. 2.1α), αρχίζει ν' απορροφά έντονα (άρα και ν' ανακλά) από μ.κ. $\lambda > 500\text{nm}$. Στο γε-

γονός αυτό οφείλεται όπως ήδη έχουμε αναφέρει η κιτρινοκόκκινη απόχρωση τους. Ο Άργυρος όμως συμπεριφέρεται έτσι από μ.κ. $\lambda > 300\text{nm}$. Για το λόγο αυτό εμφανίζει μεγάλη και ομοιόμορφη ανακλαστικότητα σ' όλη την ορατή περιοχή του Η/Μ φάσματος και γι' αυτό παρουσιάζει λευκόφαιη απόχρωση. Τέλος το Αλουμίνιο πα-



(Σχ. 2.2)

ρουσιάζει ομοιόμορφη ανακλαστικότητα για όλο το εύρος των μ.κ. που καταγράφονται στο (Σχ. 2.2).

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να αποδειχθεί ότι για υλικά των οποίων η πυκνότητα είναι πάρα πολύ μικρή (όπως αυτό συμβαίνει στα αέρια) και τα οποία έχουν μια συχνότητα συντονισμού ω_0 ο δ.δ. δίνεται από τη σχέση:

$$n \cong 1 + \frac{Nq_e^2}{2\varepsilon_0 m_e}\left(\frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2}\right)$$

m_e, q_e: η μάζα και το φορτίο του ηλεκτρονίου και N ο αριθμός των ατόμων ανά μονάδα όγκου.

ΛΥΣΗ

Έχουμε αποδείξει με τη βοήθεια του κλασσικού δυναμικού ταλαντωτή (σχ. 4.1.2.9) ότι ο δ.δ. για την περίπτωση μιας συχνότητας συντονισμού δίνεται από τη σχέση:

$$n^2 = 1 + \frac{Nq_e^2}{2\varepsilon_0 m_e}\left(\frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2}\right) \tag{1}$$

η οποία γίνεται:

$$n = \left[1 + \frac{Nq_e^2}{\varepsilon_0 m_e}\left(\frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2}\right)\right]^{1/2} \tag{2}$$

Επειδή όμως (βλ. Πίν. 4.1) ο δ.δ. των αερίων είναι σχεδόν ίσος με τη μονάδα, αυτό σημαίνει ότι ο δεύτερος όρος της υπορίζου ποσότητας στη (σχ. 2) είναι πάρα πολύ μικρός δηλ.

$x = \frac{Nq_e^2}{\varepsilon_0 m_e}\left(\frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2}\right) << 1$. Και επειδή $\sqrt{1+x} \simeq 1 + \frac{x}{2}$ τότε:

$$n \simeq 1 + \frac{Nq_e^2}{2\varepsilon_0 m_e}\left(\frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2}\right).$$

2. Από τη γνωστή σχέση διασκεδασμού: $n^2(\omega) = 1 + \frac{Nq_e^2}{\varepsilon_0 m_e}\left(\frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2}\right)$,

που ισχύει για τα αραιά αέρια, να αναδειχθεί ο τύπος του Cauchy για την περιοχή του ομαλού διασκεδασμού.

ΛΥΣΗ

Με τη χρήση του τύπου της διωνυμικής ανάπτυξης $\sqrt{1+x} \simeq 1+\frac{x}{2}$ όπου $x << 1$

θα έχουμε: $$n=\left[1+\frac{Nq_e^2}{\varepsilon_0 m_e}\left(\frac{1}{\omega_0^2-\omega^2}\right)\right]^{1/2} \simeq 1+\frac{Nq_e^2}{2\varepsilon_0 m_e\left(\omega_0^2-\omega^2\right)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n=1+\frac{Nq_e^2}{2\varepsilon_0 m_e\omega_0^2}\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^{-1} \simeq 1+\frac{Nq_e^2}{2\varepsilon_0 m_e\omega_0^2}\left(1+\frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)$$

όπου χρησιμοποιήσαμε πάλι τη διωνυμική ανάπτυξη: $(1-x)^{-1} \simeq 1+x$ με $x << 1$ επειδή για την περιοχή του ομαλού διασκεδασμού ισχύει η σχέση $x=\frac{\omega^2}{\omega_0^2} << 1$. Άρα:

$$n=1+\frac{Nq_e^2}{2\varepsilon_0 m_e\omega_0^2}+\frac{Nq_e^2}{2\varepsilon_0 m_e\omega_0^4}\omega^2 \text{ και επειδή } \omega=2\pi c/\lambda$$

$$n=A+\frac{B}{\lambda^2} \text{ όπου } A=1+\frac{Nq_e^2}{2\varepsilon_0 m_e\omega_0^2} \text{ και } B=\frac{2\pi^2c^2Nq_e^2}{\varepsilon_0 m_e\omega_0^4}$$

Αριθμητική εφαρμογή

Έστω $\omega_0 = 1.04719\times10^{16}$ rad/s για μια περιοχή της συχνότητας συντονισμού (υπεριώδης).

Τότε $\lambda_0 = 180$nm (θα είναι το αντίστοιχο μ.κ. στην περιοχή της συχνότητας συντονισμού.

$N_0 \simeq 2\times10^{25}$ άτομα/m^3 (τυπική πυκνότητα ατόμων στο (αέριο) διηλεκτρικό υλικό σε κανονικές συνθήκες θερμοκρασίας).

$c = 3\times10^8$ m/s (ταχύτητα του φωτός).

$\varepsilon_0 = 1/4\pi\times10^9$ F/m $= 0.885\times10^{-11}$ F/m (ηλεκτρική διαπερατότητα του κενού).

$q_e = 1.6\times10^{-19}$C (φορτίο ηλεκτρονίου).

$m_e = 0.91\times10^{-30}$kg (μάζα ηλεκτρονίου).

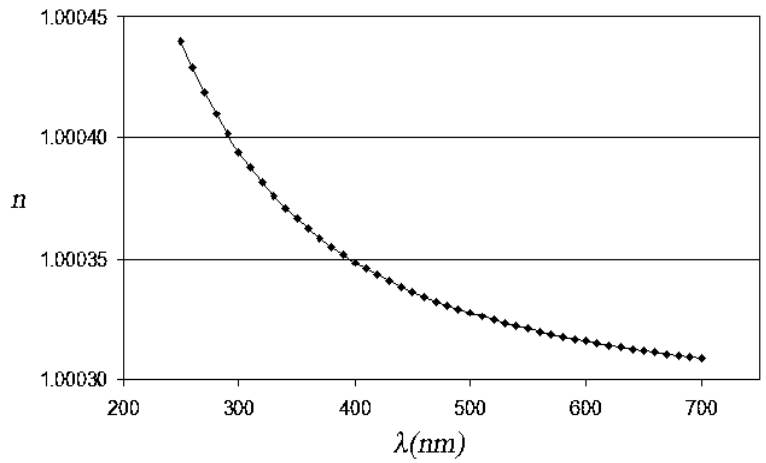
Με βάση τις τιμές αυτές των σταθερών βρίσκουμε:

$$A = 1.0000145 \quad \text{και} \quad B = 4.700117\times10^{-20}\,\text{m}^2,$$

και ο τύπος του Cauchy παίρνει τη μορφή:

$$n = 1.0000145 + \frac{4.700117\times10^{-20}}{\lambda^2} = A + \frac{B}{\lambda^2}$$

Η γραφική παράσταση της σχέσης αυτής μεταξύ των 250nm και 700nm φαίνεται στο επόμενο διάγραμμα:



3. Για ένα οπτικό μέσο με μια συχνότητα συντονισμού, ν' αποδειχθεί ότι ο τύπος του Cauchy είναι μια προσέγγιση της εξίσωσης του Sellmeier.

ΛΥΣΗ

Η εξίσωση του Sellmeier (σχ. 4.3.3.1):

$$n^2 = 1 + \frac{S\lambda^2}{\lambda^2 - \lambda_0^2} = 1 + \frac{S}{1 - \lambda_0^2/\lambda^2}$$

με τη βοήθεια της διωνυμικής σχέσης:

$$(\alpha + x)^n = a^n + na^{n-1}x + \frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}x^2 + \ldots \text{ γίνεται:}$$

$$n^2 = 1 + S\left(1 + \frac{\lambda_0^2}{\lambda^2} + \frac{\lambda_0^4}{\lambda^4} + \ldots\right)$$

Για εκείνο το τμήμα της συνάρτησης διασκεδασμού όπου το λ θεωρείται αρκετά μεγαλύτερο του λ_0, με λ_0 το μ.κ. συντονισμού, οι όροι λ_0/λ μεγαλύτερης τάξης από τη δεύτερη μπορούν να παραληφθούν οπότε:

$$n^2 = 1 + S + S\frac{\lambda_0^2}{\lambda^2}$$

Για $1 + S = M$ και $S\lambda_0^2 = N$ θα έχουμε:

$$n = \left(M + N/\lambda^2\right)^{1/2}$$

Αναπτύσσοντας το διώνυμο αυτό όπως και προηγουμένως θα έχουμε:

$$n = M^{1/2} + \frac{N}{2M^{1/2}\lambda^2} + \frac{N^2}{8M^{3/2}\lambda^4} + \ldots$$ το οποίο γίνεται:

$$n = A + \frac{B}{\lambda^2} + \frac{C}{\lambda^4} + \ldots$$

Από την τελευταία βλέπουμε ότι πρόκειται για τον τύπο του Cauchy (σχ. 4.3.1.1). Όπου $A = M^{1/2}$, $B = N/2M^{1/2}$, $C = N^2/8M^{3/2}$, ….

4. Για το αέριο H_2 ο τύπος του ομαλού διασκεδασμού προσδιορίζεται πειραματικά και δίνεται από τη σχέση:

$$n = 1 + 1.36\times10^{-4} + \frac{2.11\times10^{-18}}{\lambda^2} \qquad (1)$$

Υποθέτοντας ότι υφίσταται ακμή απορρόφησης στην υπεριώδη περιοχή του Η/Μ φάσματος να υπολογιστεί ότι το μ.κ. είναι $\lambda_0 \simeq 100\text{nm}$.

ΛΥΣΗ

Γνωρίζουμε ότι για τα αέρια με μια ακμή απορρόφησης ισχύει η σχέση διασκεδασμού:

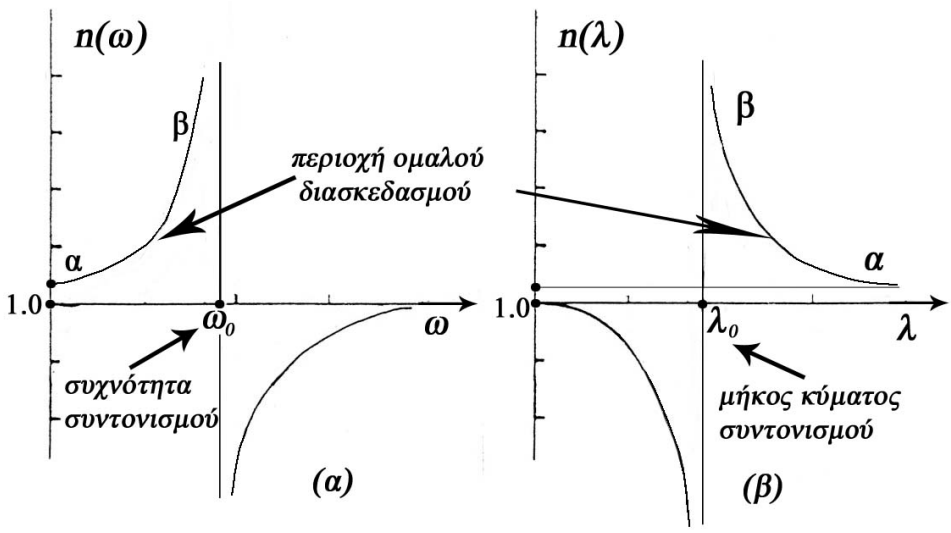
$$n = 1 + \frac{Nq_e^2}{2\varepsilon_0 m_e}\left(\frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2}\right) \qquad (2)$$

Η οποία μπορεί να πάρει τη μορφή:

$$n(\omega) = 1 + \frac{Nq_e^2}{2\varepsilon_0 m_e \omega_0^2}\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^{-1} \qquad (3)$$

Όμως για την υπεριώδη περιοχή θα έχουμε $\omega_0 \sim 10^{16}\ \text{rad/s}$. Επομένως η ποσότητα $\left(1-\omega^2/\omega_0^2\right)^{-1}$ θα είναι θετική σ' όλη την ορατή περιοχή του Η/Μ φάσματος εκεί όπου: $\omega \sim 10^{14} - 10^{15}\ \text{rad/s}$. Επιπλέον καθώς η ω αυξάνεται, αυξάνεται και ο n όπως βρίσκουμε από τη (σχ. 3) και φαίνεται στο σχήμα (α) (περιοχή αβ) . Δηλ. ο δ.δ. n αυξάνεται με τη συχνότητα (περιοχή ομαλού διασκεδασμού). Αν επί πλέον θεωρήσουμε ότι $\omega/\omega_0 \ll 1$, τότε:

$$\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^{-1} \simeq 1+\frac{\omega^2}{\omega_0^2} \tag{4}$$



Οπότε η (σχ. 3) γίνεται:

$$n(\omega)=1+\frac{Nq_e^2}{2\varepsilon_0 m_e\omega_0^2}\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^{-1} \simeq 1+\frac{Nq_e^2}{2\varepsilon_0 m_e\omega_0^2}\left(1+\frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right) \simeq 1+\frac{Nq_e^2}{2\varepsilon_0 m_e\omega_0^2}+\frac{4\pi^2c^2Nq_e^2}{\varepsilon_0 m_e\omega_0^4}\frac{1}{\lambda_0^2} \tag{5}$$

όπου $\lambda_0 = 2\pi c/\nu$ είναι το μ.κ. συντονισμού στο κενό. Δηλ. η (σχ. 5) παίρνει τη μορφή της (σχ. 1). Οπότε:

$$\frac{Nq_e^2}{2\varepsilon_0 m_e\omega_0^2}=1.36\times10^{-4} \quad (6) \quad \text{και} \quad \frac{4\pi^2c^2Nq_e^2}{\varepsilon_0 m_e\omega_0^4}=2.11\times10^{-18}\,\mathrm{m}^2 \tag{7}$$

Αν τώρα διαιρέσουμε τη (σχ. 7) με τη (σχ. 6) θα πάρουμε:

$\frac{4\pi^2c^2}{\omega_0^2}=\frac{2.11\times10^{-18}}{2.721\times10^{-4}}$ ή $\nu_0=\frac{\omega_0}{2\pi}=\left(\frac{2.721\times10^{-4}}{2.11\times10^{-18}}\right)^{1/2}\cdot c \simeq 3\times10^{15}\,\mathrm{s}^{-1}$. Και από τη σχέση:

$c=\lambda_0\nu_0 \Rightarrow \lambda_0 \simeq 10^{-7}\,\mathrm{m}=100\mathrm{nm}$. Που είναι το μ.κ. συντονισμού (ακμή απορρόφησης) και που ανήκει στην υπεριώδη περιοχή του Η/Μ φάσματος.

Αν τώρα μεταξύ των(σχ. 6,7) απαλείψουμε τον παράγοντα ω_0 θα πάρουμε:

$$\frac{Nq_e^2}{4\pi c^2\varepsilon_0 m_e} \simeq 3\times10^{10}\,\mathrm{m}^{-2} \tag{8}$$

της οποίας την τιμή μπορούμε να επιβεβαιώσουμε με τον εξής τρόπο. Για το H_2 και σε κανονικές συνθήκες πίεσης και θερμοκρασίας 22.4lit H_2 περιλαμβάνουν 6×10^{23} μόρια. Οπότε ο αριθμός των ατόμων N ανά μονάδα όγκου θα είναι:

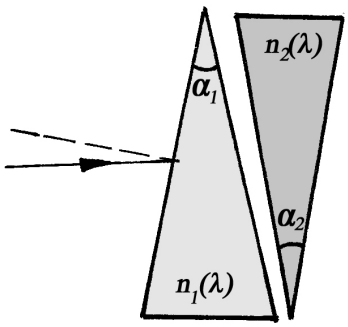
$$N = 2\times\left(6\times10^{23}/22400\times10^{-6}\right) \simeq 5\times10^{25} \text{ άτομα/m}^3 \tag{9}$$

Επομένως:

$$\frac{Nq_e^2}{4\pi c^2\varepsilon_0 m_e} \simeq \frac{\left(5\times10^{25}\right)\times\left(1.6\times10^{-19}\right)^2}{4\times3{,}14\times\left(3\times10^8\right)^2\times\left(8.85\times10^{-12}\right)\left(9.1\times10^{-31}\right)} \simeq 4\times10^{10}\,\text{m}^{-2} \tag{10}$$

Η οποία όπως βλέπουμε συμφωνεί προσεγγιστικά με τη (σχ. 8).

5. Να υπολογιστεί κατ' αρχή η συνολική γωνία εκτροπής δ_t που προκύπτει κατά τη δίοδο του φωτός μέσω ενός συστήματος δύο λεπτών πρισμάτων διαφορετικών υλικών σε διάταξη που φαίνεται στο παρακάτω σχήμα, των οποίων οι διαθλαστικές γωνίες είναι a_1, a_2 και οι δ.δ. n_1, n_2. Κατόπιν να καθοριστεί ο λόγος a_2/a_1 για τις εξής περιπτώσεις: α) Όταν $\delta_t = 0$. Στην προκειμένη περίπτωση το σύστημα των δύο πρισμάτων ονομάζεται ευθεισκοπικό. Η συνθήκη μάλιστα $\delta_t = 0$, να αφορά μια κεντρική περιοχή του ορατού φάσματος π.χ. $\bar{\lambda} = 587.6\text{nm}$: κίτρινη γραμμή της φασματικής λυχνίας He. β) Όταν $d\delta_t/d\lambda = 0$. Στην περίπτωση αυτή το σύστημα των δύο πρισμάτων ονομάζεται αχρωματικό. Δηλ. ο διασκεδασμός που προκύπτει από το πρώτο κατά την πρόσπτωση μιας δέσμης λευκού φωτός, αντισταθμίζεται από



το διασκεδασμό του δεύτερου οπότε η προκύπτουσα στην έξοδο δέσμη είναι πάλι λευκό φως. Για τις δύο περιπτώσεις, θεωρούμε την προσπίπτουσα δέσμη σχεδόν κάθετη. Δηλ. έχουμε μικρές γωνίες πρόσπτωσης.

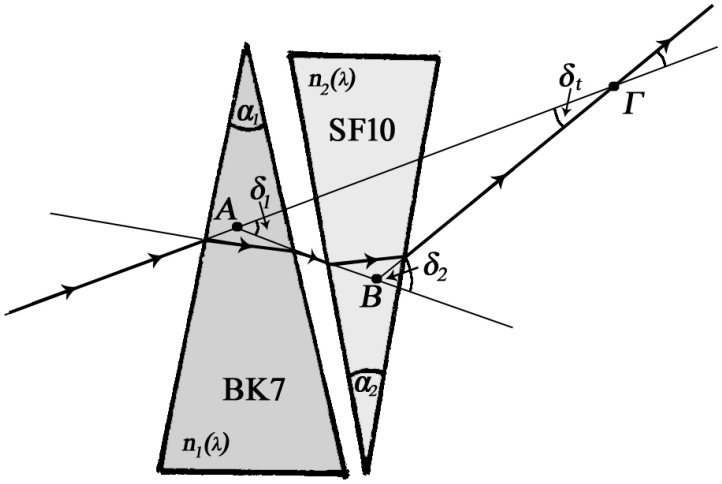
Επίσης προκειμένου να εφαρμοστούν τα προαναφερόμενα να χρησιμοποιηθούν τα γυαλιά BK7 και SF10 (βλ. Πίν. 4.2.3.1) για μ.κ. και αντίστοιχες τιμές των δ.δ. που φαίνονται στον παραπάνω πίνακα. Σαν μέσο μ.κ. να χρησιμοποιηθεί το

$\bar{\lambda} = 587.6\text{nm}$ το οποίο αντιστοιχεί στην κίτρινη γραμμή μιας φασματικής λυχνίας He (Ηλίου).

$\lambda(\text{nm})$	$n_{\text{BK 7}}$	n_{SF10}
390	1.5322	1.7840
435.8	1.5267	1.7620
486.1	1.5224	1.7465
587.6	1.5168	1.7282
656.3	1.5143	1.7209
700	1.5131	1.7173

ΛΥΣΗ

Εφόσον θεωρήσουμε ότι τα πρίσματα είναι λεπτά, για το καθένα θα ισχύει η σχέση: $\delta = \alpha(n-1)$ όπου δ η γωνία ελάχιστης εκτροπής, α η διαθλαστική γωνία του και n ο δ.δ. (σχ. 3.3.3.8). Για μικρή σχετικά γωνία πρόσπτωσης μιας ακτίνας στο πρώτο πρίσμα και τη διάθλαση μέσω αυτού, καθώς και τη διάθλασή του από το δεύτερο πρίσμα, το σύστημα θα εμφανίζει μια συνολική γωνία εκτροπής δ_t η οποία μπορεί να υπολογιστεί με τη βοήθεια του επομένου σχήματος.



Από το τρίγωνο $AB\Gamma$ και τις γωνίες του $\delta_1, \delta_2, \delta_t$ όπου δ_1 η γωνία εκτροπής κατά τη διάθλαση μέσου του πρώτου πρίσματος, δ_2 η γωνία εκτροπής μέσω του δευτέρου και δ_t η συνολική εκτροπή θα έχουμε:

$$\delta_2 = \delta_1 + \delta_t \qquad (1)$$

επειδή η δ_2 συνιστά εξωτερική γωνία του τριγώνου $AB\Gamma$. Όπου: $\delta_1 = \alpha_1(n_1 - 1)$, $\delta_2 = \alpha_2(n_2 - 1)$ οι γωνίες ελάχιστης εκτροπής από το πρώτο και το δεύτερο πρίσμα και δ_t η συνολική γωνία εκτροπής. Επομένως:

$$\delta_t = \delta_2 - \delta_1 = \alpha_2(n_2 - 1) - \alpha_1(n_1 - 1) \tag{2}$$

(α) Για ένα ευθυσκοπικό πρίσμα (σύστημα δύο πρισμάτων) θα πρέπει να ισχύει: $\delta_t = 0$. Άρα από τη (σχ. 2) βρίσκουμε:

$$\alpha_2/\alpha_1 = (n_1 - 1)/(n_2 - 1) \tag{3}$$

και προκειμένου να εφαρμόσουμε τη σχέση αυτή για μια μέση περιοχή του φάσματος π.χ. για μ.κ. $\bar{\lambda} = 587.6\text{nm}$ (γραμμή της φασματικής λυχνίας He (Ηλίου), με τη βοήθεια της (σχ. 3) και του παραπάνω πίνακα βρίσκουμε:

$$\alpha_2/\alpha_1 = (n_1 - 1)/(n_2 - 1) = (1.5168 - 1)/(1.7282 - 1) = 0.7096 \tag{4}$$

όπου οι δ.δ. n_1, n_2 αφορούν τα γυαλιά BK7 (στεφανύαλος) και SF10 (πυριτύαλος) για το μ.κ. $\bar{\lambda} = 587.6\text{nm}$.

(β) Προκειμένου τώρα να δημιουργήσουμε ένα αχρωματικό πρίσμα (από τη σύνθεση των δύο πρισμάτων διαφορετικών δ.δ. και διαφορετικών διαθλαστικών γωνιών θα πρέπει να ισχύει η συνθήκη:

$$d\delta_t / d\lambda = 0 \tag{5}$$

Δηλ. να μην υφίσταται καμία μεταβολή της συνολικής γωνίας εκτροπής σε σχέση με τη μεταβολή του μ.κ. Τότε με τη βοήθεια της (σχ. 2) επειδή: $n_1 = n_1(\lambda)$ και $n_2 = n_2(\lambda)$ βρίσκουμε: $(dn_1/d\lambda)a_1 - (dn_2/d\lambda)a_2 = 0$. Οπότε τελικά:

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{dn_1/d\lambda}{dn_2/d\lambda} \tag{6}$$

Προκειμένου τώρα να εφαρμόσουμε τη σχέση αυτή για μια σχετικά μέση περιοχή του ορατού φάσματος: π.χ. για $\lambda_a = 587.6\text{nm}$ και $\lambda_b = 486.1\text{nm}$ όπως βλέπουμε από τον πίνακα, θα έχουμε: $\frac{a_2}{a_1} = \frac{dn_1/d\lambda}{dn_2/d\lambda} \simeq \frac{\Delta n_1/\Delta\lambda}{\Delta n_2/\Delta\lambda} = \frac{\Delta n_1}{\Delta n_2} = \frac{n_{1b} - n_{1a}}{n_{2b} - n_{2a}}$ ή

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{1.5168 - 1.5224}{1.7282 - 1.7465} = 0.306 \qquad (7)$$

Από φυσική άποψη αυτό σημαίνει ότι για πρίσματα από BK7 και SF10 με λόγο διαθλαστικών γωνιών $a_2/a_1 = 0.306$ και για την περίπτωση ακτινοβολίας φασματικού εύρους $\Delta\lambda = 587.6 \rightarrow 486.1$ nm κατά την έξοδό της από το σύστημα τα διάφορα μ.κ. μεταξύ τους δεν θα εμφανίζουν εκτροπή.

Ας εφαρμόσουμε τώρα τα προαναφερόμενα για προσπίπτουσα ακτινοβολία φασματικού εύρους $\Delta\lambda = 390 \rightarrow 700$ nm (βλ. πίνακα) δηλ. για σχεδόν πλήρως λευκό φως. Τότε θα έχουμε:

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{n_{1b} - n_{1a}}{n_{2b} - n_{2a}} = \frac{1.5131 - 1.5267}{1.7173 - 1.762} = 0.304 \qquad (8)$$

Βλέπουμε δηλ. ότι θα έχουμε σχεδόν ίδιο λόγο διαθλαστικών γωνιών με αυτόν που μας δίνει η (σχ. 7). Το οποίο σημαίνει ότι κατά την έξοδο από το σύστημα των δύο πρισμάτων μετά την πρόσπτωση σ' αυτά δέσμης (παράλληλο μέτωπο κύματος) λευκού φωτός θα έχουμε και πάλι μια δέσμη λευκού φωτός με διαφορετική βέβαια κλίση σε σχέση με την προσπίπτουσα. Το γεγονός αυτό οφείλεται στο ότι ο τρόπος υπολογισμού του λόγου a_2/a_1 οδηγεί στο γεγονός ότι οι συνολικές γωνίες εκτροπής για κάθε μ.κ. είναι περίπου ίδιες.

Τα προαναφερόμενα αποτελούν στην οπτική τεχνολογία τη βάση κατασκευής των λεγόμενων αχρωματικών συστημάτων. Δηλ. συστημάτων που το τελικό αποτέλεσμα της διέλευσης λευκού φωτός διά μέσου τους δεν εμφανίζει χρωματικά σφάλματα λόγω του αντισταθμιζόμενου διασκεδασμού. Κλασσικό παράδειγμα τέτοιων στοιχείων είναι οι αχρωματικοί φακοί (βλ. Γεωμ. Οπτική: § 3.6.2), οι οποίοι χρησιμοποιούνται για απεικονίσεις πολυχρωματικών αντικειμένων.

6. Να αποδειχθεί ότι ένας κυματοσυρμός ο οποίος διαδίδεται σ' ένα μέσον δ.δ. n (δηλ. που παρουσιάζει διασκεδασμό), συνεχώς διευρύνεται ελαττωμένου του πλάτους του.

ΛΥΣΗ

Ένας κυματοσυρμός κατά τα γνωστά συντίθεται από ένα αριθμό συνιστωσών (κυμάτων) με διαφορετική ταχύτητα φάσης η κάθε μία. Αν για την m συνιστώσα κατά τη διάδοσή της στο μέσον, η κυκλική συχνότητα είναι $\omega_m = 2\pi\nu_m$ και ο κυματοριθμός $k_m = 2\pi/\lambda_m$, τότε για την ταχύτητα φάσης υ_m θα ισχύει:

$$\upsilon_m = \frac{\omega_m}{k_m} = \frac{c}{n_m} \tag{1}$$

όπου n_m ο δ.δ. για $\lambda = \lambda_m$. Αν τώρα E_{0m} είναι το πλάτος του πεδίου της συνιστώσας m και θεωρήσουμε το συνολικά διαδιδόμενο μέτωπο κύματος ότι είναι επίπεδο, τότε η χωροχρονική μεταβολή του m επί μέρους κύματος θα δίνεται από τη σχέση:

$$E_m = E_{0m}\cos\left(\omega_m t - k_m x\right) \tag{2}$$

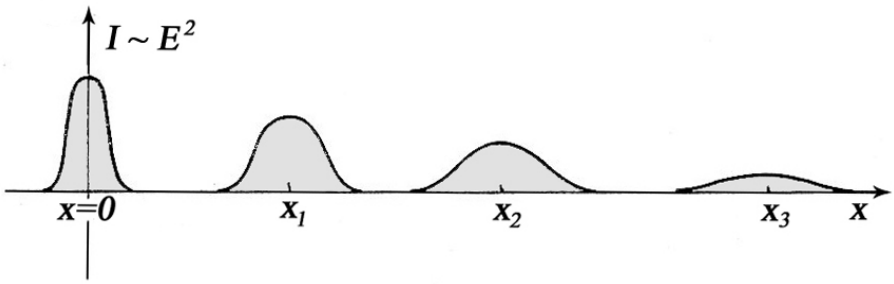
Η επαλληλία N τέτοιων κυμάτων θα συγκροτεί τον προαναφερόμενο κυματοσυρμό δηλ.:

$$E = \sum_{m=1}^{N} E_{0m}\cos\left(\omega_m t - k_m x\right) \tag{3}$$

του οποίου η αρχική μορφή για $x = 0, t = 0$ φαίνεται στο επόμενο σχήμα. Δηλ. για $x = 0, t = 0$ σαν αρχικές συνθήκες, η κάθε συνιστώσα θα έχει μέγιστο πλάτος (επειδή $\cos(k_m x - \omega_m t) = 1$) οπότε το ίδιο θα ισχύει και για το E στη θέση αυτή. Θα προσπαθήσουμε τώρα να βρούμε σε μια άλλη απόσταση από την αρχή των συντεταγμένων $(x \neq 0)$ αν τα μέγιστα του κάθε πλάτους των συνιστωσών λαμβάνονται την ίδια χρονική στιγμή. Για να συμβαίνει αυτό θα πρέπει να ισχύει $\omega_m t - k_m x = 0$ ή

$$x = \frac{\omega_m t}{k_m} = \upsilon_m t = \frac{ct}{n_m} \tag{4}$$

Λόγω όμως του φαινομένου του διασκεδασμού ο n_m δεν είναι σταθερός αλλά εξαρτάται από το εκάστοτε λ_m. Αυτό σημαίνει ότι για μια διαφορετική χρονική στιγμή



$t \neq 0$ το μέγιστο του πλάτους της κάθε συνιστώσας θα λαμβάνεται σε διαφορετική θέση $x_m = ct/n_m$.Αυτός ακριβώς είναι ο λόγος που θα προκύψει αύξηση του εύρους

του κυματοσυρμού. Τέλος για λόγους διατήρησης της ενέργειας του θα ελαττώνεται ταυτόχρονα και το πλάτος του στις διαφορετικές θέσεις x, όπως φαίνεται καθαρά στο προηγούμενο σχήμα. (Μια αυστηρή περιγραφή του φαινόμενου του διασκεδασμού (διασποράς) ενός κυματοσυρμού δίνεται στο ΘΕΜΑ 1).

7. Με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης του $n(\lambda)$ ν' αποδειχθεί ότι για όλες τις τιμές για $n>1$ ή $n<1$ το πηλίκο c/υ_g (όπου υ_g η ταχύτητα ομάδας) είναι πάντοτε μεγαλύτερό της μονάδας. Δηλ. η ταχύτητα του φωτός πάντοτε είναι μεγαλύτερη της υ_g.

ΛΥΣΗ

Στο σχήμα που ακολουθεί βλέπουμε τη γραφική παράσταση του δ.δ. n συναρτήσει του λ όπου $n=c/\upsilon_p$ και υ_p η ταχύτητα φάσης του κύματος. Για την περιοχή μ.κ. όπου $n<1$ διαπιστώνουμε με βάση την προηγούμενη σχέση ότι $\upsilon_p>c$ γεγονός που αντιτίθεται στα συμπεράσματα της ειδικής θεωρίας της σχετικότητας με βάση τα οποία γνωρίζουμε ότι η ταχύτητα του φωτός στη φύση είναι οριακή. Στην πραγματικότητα η ασυμφωνία αυτή είναι φαινομενική δεδομένου ότι κατά τα γνωστά η θεωρία της σχετικότητας αναφέρεται στην ταχύτητα διάδοσης του οπτικού σήματος (της πληροφορίας) και όχι της ταχύτητας φάσης υ_p. Η ταχύτητα διάδοσης του σήματος (κυματοσυρμού) είναι κατά τα γνωστά η ταχύτητα ομάδας υ_g η οποία δίνεται από τη σχέση (βλ. παράδειγμα § 4.5.2): $\upsilon_g=\dfrac{c}{n+\omega\dfrac{dn}{d\omega}}$ οπότε:

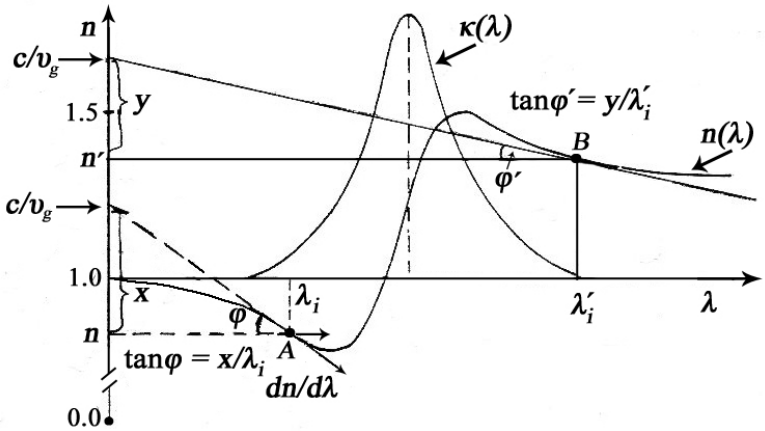
$\dfrac{c}{\upsilon_g}=n+\omega\dfrac{dn}{d\omega}$. Αλλά $\omega=2\pi\nu=\dfrac{2\pi}{\lambda}c$. Επομένως: $\dfrac{dn}{d\omega}=\dfrac{dn}{d\left(\dfrac{2\pi}{\lambda}c\right)}=-\dfrac{\lambda^2}{2\pi c}\dfrac{dn}{d\lambda}$.

άρα: $\dfrac{c}{\upsilon_g}=n-\dfrac{2\pi c}{\lambda}\dfrac{\lambda^2}{2\pi c}\dfrac{dn}{d\lambda}$ και τελικά: $\dfrac{c}{\upsilon_g}=n-\lambda\dfrac{dn}{d\lambda}$.

Από την τελευταία σχέση διαπιστώνουμε ότι για οποιοδήποτε λ στις περιοχές όπου $n<1$ ή $n>1$ το πρόσημο του $(dn/d\lambda)$ είναι αρνητικό άρα το γινόμενο $-\lambda(dn/d\lambda)$ είναι θετικό. Πράγματι από τη γραφική παράσταση του $n(\lambda)$ και συγκεκριμένα για τα σημεία (Α) $n<1$ και (Β) $n'>1$:

$$(\mathrm{A}) \rightarrow \frac{c}{\upsilon_g} = n - \lambda_i \frac{dn}{d\lambda} = n - \lambda_i \tan(180^0 - \phi) = n + \lambda_i \tan\phi = n + x > 1$$

$$(\mathrm{B}) \rightarrow \frac{c}{\upsilon_g} = n' - \lambda_i' \frac{dn}{d\lambda} = n' - \lambda_i' \tan(180^0 - \phi') = n' + \lambda_i' \tan\phi' = n' + y > 1$$



Επομένως $c/\upsilon_g > 1$ και άρα $c > \upsilon_g$ δηλ. η ταχύτητα διάδοσης οποιουδήποτε σήματος (κυματοσυρμού) είναι μικρότερη της ταχύτητας διάδοσης του φωτός.

Ασυμφωνία εμφανίζεται στην περιοχή της ζώνης απορρόφησης όπου η κλίση της $(dn/d\lambda)$ είναι θετική. Στην πράξη όμως σ' αυτή την περιοχή η απορρόφηση είναι τόσο έντονη ώστε το πλάτος του κυματοσυρμού μειώνεται στο μηδέν σε διάστημα κλάσματος του μ.κ. οπότε οι ταχύτητες φάσης και ομάδας χάνουν την έννοιά τους.

8. Ν' αποδειχθεί ότι για Η/Μ κύματα οποιουδήποτε μήκους κύματος που διαδίδονται στο κενό ισχύει: $\upsilon_p = \upsilon_g$. Δηλ. η ταχύτητα φάσης είναι ίδια με την ταχύτητα ομάδας.

ΛΥΣΗ

Θα έχουμε: $c = \omega/k$ οπότε: $\omega = ck$. Τότε: α) $\upsilon_p = \omega/k = c$ και β) $\upsilon_g = d\omega/dk = c$. Επομένως $\upsilon_p = \upsilon_g$. Δηλ. στο κενό δεν υφίσταται διασκεδασμός.

9. Γνωρίζουμε ότι στη ζώνη της ιονόσφαιρας, λόγω της έντονης δράσης της υπεριώδους ακτινοβολίας τα άτομα είναι ιονισμένα και τα προκύπτοντα ηλεκτρόνια έχουν τη δυνατότητα να εκτελούν ανεμπόδιστες ταλαντώσεις κάτω από την επίδραση δυνάμεων που ασκούν σ' αυτά τα διαδιδόμενα Η/Μ κύματα. Αν αγνοήσουμε

την συμμετοχή των θετικών ιόντων, τότε ένας προσεγγιστικός τύπος διασκεδασμού που αφορά τα ηλεκτρόνια αποδεικνύεται ότι έχει τη μορφή: $\omega^2 = \omega_p^2 + c^2k^2$. Όπου $\omega_p = 2\pi\nu_p$ με $\nu_p \simeq 20\text{MHz}$ ν' αντιπροσωπεύει μια σταθερή συχνότητα κατωφλίου. Ν' αποδειχθεί ότι παρά το ότι η ταχύτητα φάσης είναι μεγαλύτερη της ταχύτητας του φωτός, η ταχύτητα ομάδας είναι μικρότερη της τελευταίας.

ΛΥΣΗ

Θα έχουμε: $$\omega^2 = \omega_p^2 + c^2k^2 \qquad (1)$$

Και παίρνοντας τις παραγώγους των δύο μελών της (σχ. 1) θα έχουμε:

$$2\omega\frac{d\omega}{dk} = 2c^2k \qquad \text{ή} \qquad \left(\frac{\omega}{k}\right)\left(\frac{d\omega}{dk}\right) = \upsilon_p\upsilon_g = c^2 \qquad (2)$$

α) Από τη (σχ. 1) θα έχουμε: $\left(\frac{\omega}{k}\right)^2 = \left(\frac{\omega_p}{k}\right)^2 + c^2 \Rightarrow \upsilon_p = \sqrt{c^2 + \left(\frac{\omega_p}{k}\right)^2} \Rightarrow$

$$\upsilon_p > c \qquad (3)$$

β) Επίσης από τη (σχ.2) θα έχουμε: $\upsilon_p\upsilon_g = c^2 \Rightarrow \upsilon_g = c\left(\frac{c}{\upsilon_p}\right)$ και επειδή $\frac{c}{\upsilon_p} < 1 \Rightarrow$

$$\upsilon_g < c \qquad (4)$$

Δηλ. για τα διαδιδόμενα Η/Μ κύματα στο φυσικό σύστημα της ιονόσφαιρας, παρά το ότι η ταχύτητα φάσης τους είναι μεγαλύτερη της ταχύτητας του φωτός, η ταχύτητα ομάδας είναι μικρότερη.

10. Τα υδάτινα κύματα που διαδίδονται σε περιοχές μεγάλου βάθους, χαρακτηρίζονται από την ακόλουθη σχέση διασκεδασμού: $\omega = \alpha\sqrt{k}$ όπου a μια σταθερή (βλ. Κεφ. 1: Κύματα, ΘΕΜΑ 1: προσέγγιση της (σχ. 1.2.5)). Ν' αποδειχθεί ότι η ταχύτητα ομάδας αυτών των κυμάτων είναι το μισό της ταχύτητας φάσης τους.

ΛΥΣΗ

Γνωρίζουμε ότι μεταξύ των υ_g, υ_p υφίσταται η (σχ. 4.5.4.29):

$$\upsilon_g = \upsilon_p + k\frac{d\upsilon_p}{dk} \tag{1}$$

Θα έχουμε: $$\upsilon_p = \frac{\omega}{k} = \frac{\omega(k)}{k} = \frac{a\sqrt{k}}{k} \quad \Rightarrow \quad \upsilon_p = \frac{a\sqrt{k}}{k} \tag{2}$$

Επίσης: $\dfrac{d\upsilon_p}{dk} = \dfrac{d}{dk}\left(\dfrac{a\sqrt{k}}{k}\right) = \dfrac{\left(a\sqrt{k}\right)'_k k - a\sqrt{k}}{k^2}$ και επειδή: $\left(\sqrt{k}\right)'_k = \dfrac{1}{2\sqrt{k}} \Rightarrow$

$$\frac{d\upsilon_p}{dk} = \frac{\left(a/2\sqrt{k}\right)k - a\sqrt{k}}{k^2} \tag{3}$$

Με συνδυασμό τώρα των (σχ. 1,2,3) βρίσκουμε:

$$\upsilon_g = \upsilon_p + k\frac{d\upsilon_p}{dk} = \frac{a\sqrt{k}}{k} + k\left[\frac{\left(a/2\sqrt{k}\right)k - a\sqrt{k}}{k^2}\right] = \frac{1}{2}\frac{a\sqrt{k}}{k} = \frac{1}{2}\upsilon_p .$$

11. Ν' αποδειχθεί ότι η ταχύτητα ομάδας ενός κύματος De Broglie που συνοδεύει ένα σωματίδιο, είναι ίση με την ταχύτητα του σωματιδίου.

ΛΥΣΗ

α) Για το σωματίδιο: $E = \frac{1}{2}m\upsilon^2 = \frac{1}{2}\frac{m^2\upsilon^2}{m} = \frac{1}{2}\frac{p^2}{m}$ όπου υ η ταχύτητα του σωματιδίου και p η ορμή του.

β) Κατά De Broglie: $p = \frac{h}{\lambda} = \hbar k$. Και επειδή για το σωματίδιο $p = m\upsilon$ τότε:

$$\upsilon = \hbar k/m \tag{1}$$

Επίσης $E = h\nu = \hbar\omega$. Οπότε: $E = \hbar\omega = \frac{1}{2}\frac{p^2}{m} = \frac{(\hbar k)^2}{2m} = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \Rightarrow \omega = \frac{\hbar k^2}{2m}$ (2)

Και επειδή $\upsilon_g = d\omega/dk$ με τη βοήθεια της (σχ. 2) θα έχουμε:

$$\upsilon_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{2\hbar k}{2m} = \frac{\hbar k}{m} \tag{3}$$

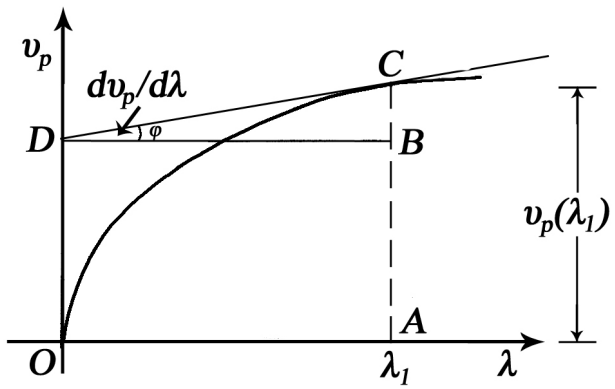
Τελικά από τις (σχ. 1,2) βλέπουμε ότι: $\upsilon = \upsilon_g$.

12. Ν' αποδειχθεί ότι αν μας είναι γνωστή η συναρτησιακή μορφή της ταχύτητας φάσης υ_p από το μ.κ. λ δηλ. $\upsilon_p = \upsilon_p(\lambda)$, τότε είναι δυνατόν με γραφικό τρόπο να προσδιορίσουμε την ταχύτητα ομάδας υ_g. (Εφαρμογή για το νερό όπου: $\upsilon_p = a\sqrt{\lambda}$, με a μια σταθερή).

ΛΥΣΗ

Η γραφική παράσταση της $\upsilon_p = a\sqrt{\lambda}$ δίνεται στο παρακάτω σχήμα: Για ένα μ.κ. λ_1 η εφαπτόμενη στο σημείο C της καμπύλης θα είναι η παράγωγος $d\upsilon_p/d\lambda$. Επομένως:

$$\tan\phi = \frac{d\upsilon_p}{d\lambda} = \frac{CB}{DB} \quad \Rightarrow \quad (CB) = (DB)\tan\phi = \lambda_1 \frac{d\upsilon_p}{d\lambda} \tag{1}$$



Αλλά: $AB = AC - CB$ (2)

Οπότε και με βάση τις (σχ. 1,2):

$AB = \upsilon_p(\lambda_1) - \lambda_1 \dfrac{d\upsilon_p}{d\lambda}$. Επομένως $AB = \upsilon_g$ επειδή κατά τα γνωστά: $\upsilon_g = \upsilon_p - \lambda \dfrac{d\upsilon_p}{d\lambda}$.

ΑΛΥΤΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Ν' αποδειχθεί ότι για ένα αραιό αέριο με μια συχνότητα συντονισμού ω_0 και για φως που διέρχεται από αυτό ορισμένης συχνότητας ω, ισχύει η σχέση: $\frac{n-1}{\rho} = \text{σταθ.}$ Όπου ρ η πυκνότητα του αερίου. (Η σχέση αυτή ονομάζεται τύπος του Gladstone).

Υπόδειξη: Για αραιό αέριο: $n \simeq 1$. Τότε: $n \cong 1 + \frac{Nq_e^2}{2\varepsilon_0 m_e}\left(\frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2}\right)$ (Λυμένη Άσκ. 1). Και αν M είναι η ατομική μάζα του αερίου τότε: $\rho = NM$.

2. Να προσδιοριστούν οι ακραίες τιμές της απλοποιημένης συνάρτησης του συντελεστή απόσβεσης που δίνεται από τη γνωστή σχέση:

$$\kappa(\omega) = \frac{Nq_e^2}{8\varepsilon_0 m_e \omega_0} \cdot \frac{\gamma}{(\omega - \omega_0)^2 + (\gamma/2)^2}$$

Ποια είναι η μορφή της;

Υπόδειξη: Από τη σχέση: $\frac{d\kappa(\omega)}{d\omega} = 0$ θα πρέπει να βρούμε ότι ακραία τιμή της $\kappa(\omega)$ έχουμε όταν: $\omega = \omega_0$. Κατόπιν βρίσκουμε την αλγεβρική τιμή της $\frac{d^2\kappa(\omega)}{d\omega^2}$ για $\omega = \omega_0$. Η συνάρτηση $\kappa(\omega)$ τελικά βρίσκεται να παρουσιάζει μέγιστο.

3. Ο δείκτης διάθλασης του νερού για Η/Μ ακτινοβολία μ.κ. $\lambda = 10\mu\text{m}$ είναι $\tilde{n} = 1.22 - i0.051$. Σε απόσταση z ίση με πόσες φορές το μήκος κύματός της λ η συγκεκριμένη ακτινοβολία εξασθενεί κατά 90% μέσα στο νερό; (Το προσπίπτον στο νερό μέτωπο κύματος θεωρείται παράλληλο).

Υπόδειξη: Θα εφαρμόσουμε το νόμο του Beer για $(I/I_0) = 0.1$. Και επειδή $\kappa = 0.051$ θα πρέπει τελικά να βρούμε: $\text{N} = (z/\lambda) \simeq 3.6$.

4. Διαθέτουμε δύο διαφανή λεπτά πρίσματα της ίδιας διαθλαστικής γωνίας a που είναι κατασκευασμένα από τα υλικά με την κωδική ονομασία BK7 και SF10. Οι καμπύλες $n = n(\lambda)$ των δύο αυτών μέσων για την περιοχή του ομαλού διασκεδασμού δίνονται στο παρακάτω διάγραμμα. Επίσης δίνονται τα όρια του ορατού

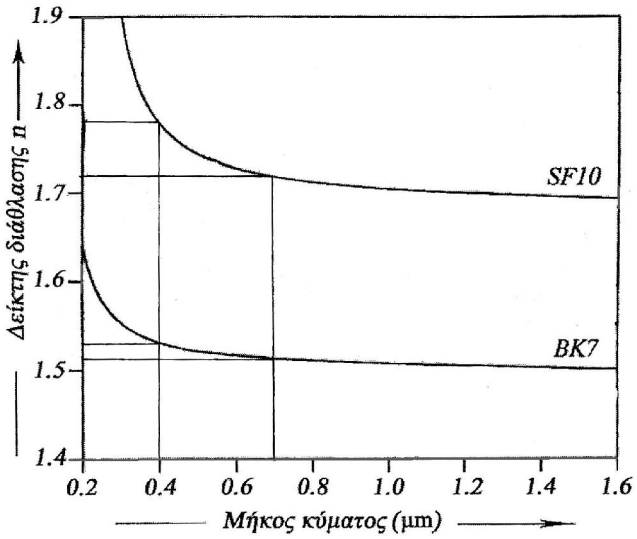
φάσματος μεταξύ των μ.κ. $\lambda_V = 0.4\mu\text{m}$ και του κόκκινου φωτός $\lambda_R = 0.7\mu\text{m}$, καθώς και οι αντίστοιχοι δείκτες διάθλασης:

$$n_{R(\text{BK7})} = 1.5137, n_{V(\text{BK7})} = 1.5312, n_{R(\text{SF10})} = 1.7218, n_{V(\text{SF10})} = 1.7843$$

α) Έστω ότι σε κάθε πρίσμα ξεχωριστά προσπίπτει επίπεδο μέτωπο κύματος λευκού φωτός σε συνθήκες ελάχιστης εκτροπής κατά προσέγγιση για όλα τα μήκη κύματος. Ν' αποδειχθεί σε ποια από τις δύο περιπτώσεις θα έχουμε μεγαλύτερο εύρος φάσματος δ κατά την ανάλυση του φωτός δια μέσου τους.

β) Ν΄ αποδειχθεί ότι η διακριτική ικανότητα $\lambda/\Delta\lambda$ του πρίσματος από το οπτικό μέσο SF10 είναι μεγαλύτερη από αυτό του BK7 για κάθε μ.κ. στην περιοχή του ορατού, με την προϋπόθεση ότι οι βάσεις τους είναι ιδίων διαστάσεων.

Δίνεται ότι ο διασκεδασμός των πρισμάτων υπακούει στον τύπο του Cauchy και ότι για λεπτά πρίσματα ισχύει: $\delta = \alpha(n-1)$, όπου δ η γωνία ελάχιστης εκτροπής και α η διαθλαστική γωνία του πρίσματος.



Υπόδειξη: Με σχεδιαστικό τρόπο κατ' αρχή μπορούμε ν' αποδείξουμε ότι το εύρος του φάσματος θα δίνεται από τη σχέση: $\delta = \delta_V - \delta_R$. α) Θα πρέπει να βρούμε: $\delta_{V(\text{SF10})} - \delta_{R(\text{SF10})} > \delta_{V(\text{BK7})} - \delta_{R(\text{BK7})}$. β) Προσδιορίζουμε πρώτα τις σταθερές A, B του τύπου του Cauchy για τα πρίσματα από τα οπτικά μέσα: (BK7) και (SF10). Κατόπιν βρίσκουμε την τιμή της $(dn/d\lambda) = -(2B/\lambda^3)$ για το καθένα τους και μετά από τη (σχ. 4.4.1.6) καταλήγουμε στη σχέση: $\left|\frac{\lambda}{\Delta\lambda}\right|_{(\text{SF10})} > \left|\frac{\lambda}{\Delta\lambda}\right|_{(\text{BK7})}$.

5. Ένας φακός είναι κατασκευασμένος από γυαλί BK7 του οποίου ο αριθμός Abbe είναι: $V_D \simeq 64$. Η εστιακή του απόσταση στην κίτρινη γραμμή του Νατρίου είναι: $f_D = 600\text{mm}$. Να υπολογιστεί η διαφορά των εστιακών αποστάσεων $f_C - f_F$, όπου f_C, f_F οι εστιακές αποστάσεις για τις γνωστές κόκκινη και ιώδη γραμμή του Υδρογόνου.

Υπόδειξη: Κατ' αρχή λογαριθμίζουμε τον τύπο των κατασκευαστών φακών $1/f = (n-1)\left[(1/r_1)-(1/r_2)\right]$ (Κεφ. 3: Γεωμετρική Οπτική §3.5.1.3 (σχ. 3.5.1.3.9)) θέτοντας: $(1/r_1)-(1/r_2) = p$. Κατόπιν διαφορίζοντας την προκύπτουσα σχέση θα πρέπει να βρούμε: $-(df/f) = dn/(n-1)$. Την τελευταία, συσχετίζουμε με τον τύπο που μας δίνει τον αριθμό του Abbe: (σχ. 4.3.2.4). Βρίσκουμε: $|\Delta f| \simeq 9.375\text{mm}$.

6. Αν θεωρήσουμε τη διάδοση εγκάρσιων ελαστικών κυμάτων σε μια ράβδο, μπορεί να δειχθεί ότι η ταχύτητα φάσης είναι ανάλογη του μέτρου του κυματοδιανύσματος. Δηλ. $\upsilon_{ph} = ak$ όπου a μια σταθερή. Σ' αυτή την περίπτωση, να δειχθεί ότι η ταχύτητα ομάδας των διαδιδόμενων στη ράβδο κυμάτων είναι διπλάσια της ταχύτητας φάσης.

Υπόδειξη: Εφαρμόζουμε κατ' ευθεία τους τύπους που μας δίνουν τις ταχύτητες φάσης υ_{ph} και ομάδας υ_g συγκρίνοντάς τες.

7. Ν' αποδειχθεί ότι μεταξύ των ταχυτήτων φάσης υ_p και ομάδας υ_g για ένα οπτικό μέσο που εμφανίζει διασκεδασμό ισχύουν οι σχέσεις:

$$\upsilon_g = \upsilon_p + k\frac{d\upsilon_p}{dk} \qquad \text{και } \upsilon_g = \upsilon_p - \lambda\frac{d\upsilon_p}{d\lambda}$$

Υπόδειξη: Για ν' αποδείξουμε την πρώτη των σχέσεων, από την $\upsilon_p = \omega/k$ $\Rightarrow \omega = \upsilon_p k$. Και διαφορίζοντάς την ως προς k βρίσκουμε το ζητούμενο. Η δεύτερη σχέση προκύπτει από την πρώτη αντικαθιστώντας το $k = 2\pi/\lambda$ καθώς και το dk.

8. Για την περίπτωση που ένα διηλεκτρικό οπτικό υλικό παρουσιάζει περισσότερες από μια συχνότητες συντονισμού, τότε κατά τα γνωστά η σχέση διασκεδασμού δίνεται από την:

$$n^2(\omega) = 1 + \frac{Nq_e^2}{\varepsilon_0 m_e}\sum_j \frac{f_j}{\omega_{j0}^2 - \omega^2} \qquad \left(\sum_j f_j = 1\right)$$

όπου $f_j \quad j = 1, 2, 3 \cdots$ σταθερές. Ν' αποδειχθεί ότι η ταχύτητα ομάδας υ_g συναρτήσει του ω δίνεται από τη σχέση:

$$\upsilon_g(\omega) = c\left[1 + \frac{Nq_e^2}{2\varepsilon_0 m_e}\sum_j \frac{f_j}{\omega_{j0}^2 - \omega^2}\right] \Bigg/ \left[1 + \frac{Nq_e^2}{\varepsilon_0 m_e}\sum_j \frac{f_j}{\omega_{j0}^2 - \omega^2}\right] + \omega\left[\omega\frac{Nq_e^2}{\varepsilon_0 m_e}\sum_j \frac{f_j}{\left(\omega_{j0}^2 - \omega^2\right)^2}\right]$$

c: η ταχύτητα του φωτός.

Υπόδειξη: Για τον καθορισμό της υ_g θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί η (σχ. 4.5.3.2): $\upsilon_g = \dfrac{c}{n + \omega\left(dn/d\omega\right)}$ η οποία αποδείχθηκε σε παράδειγμα της (§ 4.5.2).